BACCALAUREAT SERIE L - ANTILLES - EPREUVE FACULTATIVE JUIN 2003

Corrigé

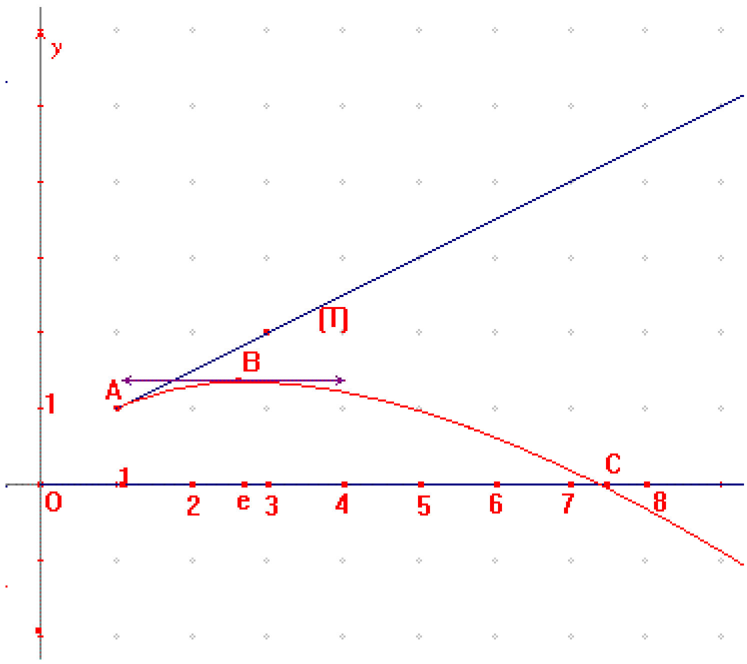
Exercice 1 (7 points)

La courbe (Γ) ci-dessous représente dans un repère orthonormal une fonction f définie sur $[1; +\infty[$

On note f' la fonction dérivée de f sur cet intervalle.

La droite (T) est tangente à la courbe (Γ) au point A(1 ; 1)

La tangente à la courbe (Γ) au point d'abscisse e est parallèle à l'axe des abscisses.



1 - Par lecture graphique

a) Donner le coefficient directeur de la droite (T)

utilisons le quadrillage :

On part de A . On avance horizontalement de 2 et on monte verticalement de 1 pour retrouver la droite alors la pente ou le coefficient directeur de (T) est le quotient $\frac{1}{2}$

b) Donner f(1) et f'(e)

Pour x = 1 , le point de la courbe correspondant à x = 1 est le point A d'ordonnée 1 donc **f(1) = 1**

Pour x = e, le point de la courbe correspondant est le point B . la courbe admettant en B une tangente horizontale de pente 0 alors f'(e) = la pente de cette tangente donc **f'(e) = 0**

c) Déterminer les réels x de l'intervalle $[1; +\infty[$ qui vérifient $f'(x) \leq 0$

d'après la courbe sur [1; e] f est croissante donc $f'(x) \geq 0$ et sur $[e ; +\infty[$ f est décroissante donc $f'(x) \leq 0$

En conclusion : $\mathbf{f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [e ; +\infty[}$

d) En traçant le plus précisément possible la tangente à la courbe (Γ) au point C, lire le coefficient directeur de cette tangente.

En utilisant une règle, on peut dessiner approximativement la tangente à la courbe en C puis on détermine une valeur approchée de la pente de cette tangente : **-0,5.**

En fait la valeur exacte de cette pente est $f'(x_C)$. Encore faut-il connaître f puis déterminer x_C le point de $[1; +\infty[$ pour lequel f(x) = 0. C'est le but de la deuxième question !!!

2 - On admet que la fonction f est définie sur [1; +∞[par $f(x) = \frac{x}{2}(2 - \ln(x))$

a) Calculer l'ordonnée du point B d'abscisse e

L'ordonnée de B est f(e) c'est-à-dire $\frac{e}{2}(2 - \ln(e))$ Or $\ln(e) = 1$ donc $y_B = \frac{e}{2}(2 - 1)$ donc $\mathbf{y_B = \frac{e}{2}}$

b) Déterminer l'abscisse du point C , intersection de la courbe (Γ) avec l'axe des abscisses.

Résolvons l'équation f(x) = 0 d'inconnue x sur [1; +∞[

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}(2 - \ln(x)) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $2 - \ln(x) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 2$ car $x \neq 0$ car $x \in [1; +\infty[$

$\Leftrightarrow \exp(\ln(x)) = \exp(2)$ car exp est bijective

$\Leftrightarrow x = e^2$

Donc $\mathbf{C(e^2; 0)}$

3 - La dérivée f' de f est définie sur [1; +∞[par $f'(x) = k\ln(\frac{e}{x})$ où k est un nombre réel donné.

a) Vérifier le résultat donné pour f'(e) à la question 1

$f'(e) = k\ln(\frac{e}{e}) = k\ln(1) = k\,0 = 0$ donc $\mathbf{f'(e) = 0}$

b) Déterminer le réel k sachant que $f'(e^2) = -\frac{1}{2}$

Pour cela, résolvons l'équation d'inconnue k réel : $f'(e^2) = -\frac{1}{2}$

$f'(e^2) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k\ln(\frac{e}{e^2}) = \Leftrightarrow k\ln(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -k\ln(e) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -k = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

le réel k cherché est $\mathbf{\frac{1}{2}}$

c) Donner une équation de la tangente à la courbe (Γ) au point C

La fonction f étant dérivable sur [1; +∞[alors elle est dérivable en x_C donc elle admet au point C une tangente (T') d'équation $y = f'(x_C)(x - x_C) + f(x_C)$

Donc (T') : $y = f'(e^2)(x - e^2) + f(e^2) = -\frac{1}{2}(x - e^2) + 0 = -\frac{1}{2}(x - e^2)$

donc **(T') :** $\mathbf{y = \frac{1}{2}(x - e^2)}$

d) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (T) et de la tangente à la courbe (Γ) au point C.

Il faut d'abord déterminer une équation cartésienne de la droite (T) :

(T) a pour pente $\frac{1}{2}$ donc (T) : $y = \frac{1}{2}x + b$. Or $A(1;1) \in (T)$ donc $1 = \frac{1}{2}(1) + b$ donc $b = \frac{1}{2}$ donc (T) :

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Alors : $M(x ; y) \in (T) \cap (T') \Leftrightarrow M(x ; y) \in (T)$ et $M(x ; y) \in (T')$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}(x - e^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x - e^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}e^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(e^2 - 1) \\ y = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(e^2 - 1)) + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(e^2 - 1) \\ y = \frac{1}{4}(e^2 - 1) + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(e^2 - 1) \\ y = \frac{1}{4}(e^2 + 1) \end{cases}$$

Donc **le point d'intersection de (T) et de (T') est le point de coordonnées**

$$\begin{cases} \mathbf{x = \frac{1}{2}(e^2 - 1)} \\ \mathbf{y = \frac{1}{4}(e^2 + 1)} \end{cases}$$

Exercice 2 (7 points)

Le numéro I.N.S.E.E est constitué de 15 chiffres. En lisant de gauche à droite :

- le premier chiffre est 1 s'il s'agit d'un homme et 2 s'il s'agit d'une femme
- les deux chiffres suivants désignent les deux derniers chiffres de l'année de naissance
- les deux chiffres suivants désignent le mois de naissance
- les deux chiffres suivants désignent le département de naissance
- les trois chiffres suivants désignent la commune de naissance
- les trois chiffres suivants désignent le numéro d'inscription sur le registre d'état-civil
- les deux chiffres suivants désignent la clé K, calculée de la manière suivante :
  - soit A le nombre entier constitué par les 13 chiffres de gauche
  - soit r le reste de la division euclidienne de A par 97
  - alors K = 97 - r

Les 13 premiers chiffres (sans la clé) du numéro I.N.S.E.E de Sophie sont 2850786183048.
On note A ce nombre et r le reste de la division euclidienne de A par 97.

1°) Donner le mois de l'année de naissance de Sophie

On isole le 3éme et le 4ème chiffre à partir de la droite de 2**85**0786183048, c'est 85 . Sophie est donc née en 1985

2°)

a) Déterminer les deux entiers a et b tels que $A = a \times 10^6 + b$ avec $0 \le b < 10^6$

$A =$ **2850786**183048 $= 2850786 \times 10^6 + 183048$ avec $0 \le 183048 < 10^6$

b) En utilisant le reste de 100 dans sa division euclidienne par 97 , montrer que $10^6 \equiv 27$ (modulo 97)

$100 = 1 \times 97 + 3$ donc $100 \equiv 3$ modulo 97 . Comme $100 = 10^2$ alors $10^2 \equiv 3$ modulo 97.

On en déduit que $(10^2)^3 \equiv 3^3$ donc $\mathbf{10^6 \equiv 27}$ **modulo 97**

c) En déduire le reste r de la division euclidienne de A par 97

$A = 2850786 \times 10^6 + 183048$. Or $10^6 \equiv 27$ modulo 97 donc $2850786 \times 10^6 \equiv 2850786 \times 27$ modulo 97. Or $2850786 \times 27 = 76971222$.

Comme $76971222 = 793\,517 \times 97 + 73$ alors $2850786 \times 10^6 \equiv 73$ modulo 97

donc $A = 2850786 \times 10^6 + 183048 \equiv 73 + 183048$ modulo 97

$183\,048 + 73 = 183\,121$ et $183\,121 = 1887 \times 97 + 82$ donc $183121 \equiv 82$ modulo 97.

En conclusion, $\mathbf{A \equiv 82}$ **modulo 97**

3°) Déterminer la clé K du numéro I.N.S.E.E de Sophie

$97 - r = 97 - 82 = 15$ donc **K = 15**

4°) Sophie, à qui l'on demande les treize premiers de son numéro I.N.S.E.E , inverse les deux derniers chiffre et répond 2850786183084 à la place de 2850786183048

On note B la réponse de Sophie

a) Calculer la différence B - A et en déduire que le reste de la division euclidienne de B par 97 est égal à 21

   B - A = 2850786183084 - 2850786183048 = 36 donc B = A + 36 . Or $A \equiv 82$ modulo 97 donc $A + 36 \equiv 82 + 36$ modulo 97. 82 + 36 = 118 = 1 × 97 + 21 donc **$B \equiv 21$ modulo 97**

b) L'erreur faite par Sophie peut-elle être détectée ?

   Oui car la clé serait 97 - 21 = 76 et non 82

Exercice 3 (6 points)

On donnera les résultats sous forme irréductible.

On dispose d'un damier dont chacune des neuf cases est marquée d'un des trois nombres 1, 2 et 3 selon le schéma ci-contre :

1	**2**	**3**
2	**3**	**1**
3	**1**	**2**

On répartit au hasard trois pions indiscernables sur le damier (un pion par case) et on appelle S la somme des trois nombres marqués sur les trois cases occupés par les pions.

Les répartitions sont toutes équiprobables.

1°) Ecrire le triangle de Pascal jusqu'à la dixième ligne et en déduire $\binom{9}{3}$

n \ p	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Donc $\binom{9}{3} = 84$

2°) On considère les événements E, F et G suivants :

E :" La somme S est égale à 3"

F : " La somme S est égale à 9 "

G : " La somme S est égale à 6 "

a) Déterminer les probabilités p(E) et p(F) des événements E et F

   Le nombre de répartitions des 3 pions sur les 9 cases est $\binom{9}{3} = 84$

   L'événement E :" La somme S est égale à 3" est réalisé pour 1 seule répartition : chaque point est placé sur un 1 donc $p(E) = \frac{1}{84}$

L'événement F : " La somme S est égale à 9 " est réalisé pour 1 seule répartition : chaque point est placé sur un 3 donc $p(F) = \frac{1}{84}$

b) Montrer que la probabilité de l'événement G est égale à $\frac{1}{3}$

L'événement G : " la somme S est égale à 6" est réalisé lorsque les 3 pions sont placés de 2 façons :

- Soit les 3 pions sont placés sur les cases 1, 2 et 3 :
  Or il y a 3 façons de placer un pion sur 1, 3 façons de placer un pion sur 2 et 3 façons de placer un pions sur 3 donc le nombre de répartitions est : $3 \times 3 \times 3 = 27$

- Soit les 3 pions sont placés sur les cases 2, 2 et 2 :
  Or il n'y a qu'une façon de le faire

Il y a donc en tout 27 + 1 = 28 cas favorables à l'événement G donc $\mathbf{p(G)} = \mathbf{\frac{28}{84}} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

3°) Soit A l'événement :" La somme S est divisible par 3 " et B l'événement : " Les trois pions sont alignés en colonne, en ligne ou en diagonale"

a) Déterminer les probabilités p(A) et p(B) des événements A et B

L'événement A est réalisé lorsque la somme S est égale à 3 ou à 6 ou à 9.

Donc $A = E \cup F \cup G$. Ces 3 événements sont disjoints 2 à 2 donc $p(A) = p(E) + p(F) + p(G) = \frac{1}{84} + \frac{1}{84} + \frac{28}{84} = \frac{30}{84}$ donc $\mathbf{p(A)} = \mathbf{\frac{30}{84}}$

Comme il y a en tout 3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales donc en tout 8 cas favorables à l'événement B donc $\mathbf{p(B)} = \mathbf{\frac{8}{84}}$

b) Calculer la probabilité $P_A(B)$ de l'événement B sachant que A est réalisé

$P_A(B) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$ Or $p(B \cap A) = p(B) = \frac{8}{84}$ car $B \cap A = B$ car B est inclus dans A

donc $P_A(B) = \frac{\frac{8}{84}}{\frac{30}{84}} = \frac{8}{30}$ donc $\mathbf{P_A(B)} = \mathbf{\frac{8}{30}}$

c) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

$P_A(B) \neq p(B)$ donc **les événements A et B ne sont pas indépendants**.

Exercice 4 (6 points)

La population d'une ville augmente régulièrement de 10 % par an. En l'an 2000, elle était de 8000 habitants.

1°) On désigne par u_n le nombre théorique d'habitants estimé pour l'année (2000 + n). On a donc $u_0 = 8000$

a) Calculer les termes u_1 et u_2

$\mathbf{u_1} = u_0 + \frac{10}{100} u_0 = u_0(1 + 0{,}1) = 1{,}1\ u_0 = 1{,}1\ (8000) = \mathbf{8800}$

$\mathbf{u_2} = u_1 + \frac{10}{100} u_1 = u_1(1 + 0{,}1) = 1{,}1\ u_1 = 1{,}1\ (8800) = \mathbf{9680}$

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire l'expression du terme u_n en fonction de n.

$u_{n+1} = u_n + \frac{10}{100} u_n = u_n(1 + 0{,}1) = 1{,}1\, u_n$ donc $\mathbf{u_{n+1} = 1{,}1\, u_n}$

Par récurrence, on démontre que $\mathbf{u_n = (1{,}1)^n u_0} = (1{,}1)^n\, 8000$

c) Calculer le nombre d'habitants prévu pour l'année 2006.

$u_6 = (1{,}1)^6 u_0 = (1{,}1)^6\, 8000 \approx \mathbf{14172}$

d) Déterminer en quelle année la population aura doublé.

Il s'agit de résoudre l'équation suivante d'inconnue l' entier naturel n : $u_n > 2u_0$

$u_n > 2u_0 \Leftrightarrow (1{,}1)^n u_0 > 2\, u_0 \Leftrightarrow (1{,}1)^n > 2$ car $u_0 > 0$

$\Leftrightarrow \ln((1{,}1)^n) > \ln(2) \Leftrightarrow n \ln(1{,}1) > \ln(2) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}1)}$ car $\ln(1{,}1) > 0$ puisque $1{,}1 > 1$

Or $\frac{\ln(2)}{\ln(1{,}1)} \approx 7{,}27$ donc **la population aura doublé à partir de 2008**

2°) On note v_n l'augmentation par rapport à l'année précédente du nombre d'habitants constatée l'année (2000 + n). On a donc, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = u_n - u_{n-1}$

a) Calculer les termes v_1 et v_2

$v_1 = u_1 - u_0 = 8800 - 8000 = 800$

$v_2 = u_2 - u_1 = 9680 - 8800 = 880$

b) Exprimer le terme général v_n en fonction de n

$v_n = u_n - u_{n-1} = (1{,}1)^n u_0 - (1{,}1)^{n-1} u_0 = u_0\,((1{,}1)^n - (1{,}1)^{n-1}) = (1{,}1)^{n-1} u_0\,(1{,}1 - 1) = (1{,}1)^{n-1} u_0\, 0{,}1$

$= \mathbf{800\,(1{,}1)^{n-1}}$

c) Calculer la somme $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ en fonction de n. Vérifier , pour le cas particulier n = 6, le résultat obtenu en 1°) c)

$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + \ldots\ldots u_{n-1} - u_{n-2} + u_n - u_{n-1} = u_n - u_0 = (1{,}1)^n u_0 - u_0$

$= u_0\,((1{,}1)^n - 1) = \mathbf{8000\,((1{,}1)^n - 1)}$

Pour n = 6, $v_1 + v_2 + \ldots + v_6 = 8000\,((1{,}1)^6 - 1) \approx \mathbf{6172}$ Or $v_1 + v_2 + \ldots + v_6 = u_6 - u_0$

donc $u_6 - u_0 \approx 6172$ donc $u_6 \approx 6172 + u_0$ donc $\mathbf{u_6 \approx 14172}$