



CORRIGE DEVOIR MAISON N° 13

**Etude des suites (u_n) définies par la relation de récurrence du type $u_n = f(u_{n-1})$
où f est une fonction numérique d'une variable réelle**

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . On dira que l'intervalle de réels I est stable par f lorsque l'ensemble des images des éléments de I par f , que l'on note $f\langle I \rangle$, est inclus dans I .

On dira que le réel a est un point fixe de f lorsque $f(a) = a$

1°) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$

a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} u_n$ existe et $u_n > 0$

Etape 1 : la propriété est vraie au rang $n = 0$ car u_0 existe et $u_0 > 0$ puisque $u_0 = 1$

Etape 2 : soit k un entier naturel. Supposons que la propriété est vraie au rang k , démontrons qu'elle est vraie au rang $k + 1$.

Supposons donc que u_k existe et $u_k > 0$

Alors $u_{k+1} = u_k + \frac{1}{u_k}$ existe car $u_k \neq 0$ puisque $u_k > 0$

De plus $u_{k+1} > 0$ car $u_k > 0$ et $\frac{1}{u_k} > 0$

Par conséquent u_{k+1} existe et $u_{k+1} > 0$. CQFD

Etape 3: d'après étape 1 et étape 2, on peut conclure que la propriété est vraie pour tout entier naturel n

b) Démontrer que (u_n) est strictement croissante.

$\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ car $\forall n \in \mathbb{N} u_n > 0$ donc (u_n) est strictement croissante

c) Soit g définie par $g(x) = x + \frac{1}{x}$. g admet-elle un point fixe ?

Raisonnons par l'absurde. Si g admettait un point fixe L alors on aurait $g(L) = L$ donc $L + \frac{1}{L} = L$

donc $\frac{1}{L} = 0$ Impossible car $1 \neq 0$. Donc g n'a pas de point fixe

d) Que peut-on alors dire de la suite (u_n) ?

(u_n) n'a pas de limite car si (u_n) avait pour limite L ,

comme $\forall n \in \mathbb{N} u_n > 0$ on aurait $L > 0$

comme $u_{n+1} = g(u_n)$, on aurait par passage à la limite à cause de la continuité de g , $L = g(L)$

donc L serait un point fixe de g . Or il n'y en a pas donc (u_n) n'est pas convergente.

2°) Soit une suite u_n définie par la connaissance de $u_0 \in \mathbb{I}$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n \text{ avec } f(\mathbb{I}) \subset \mathbb{I}$$

a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} u_n \in \mathbb{I}$

Etape 1 : la propriété est vraie au rang $n = 0$ car $u_0 \in \mathbb{I}$

Etape 2 : soit k un entier naturel. Supposons que la propriété est vraie au rang k , démontrons qu'elle est vraie au rang $k + 1$.

Supposons donc que $u_k \in \mathbb{I}$

Alors $u_{k+1} = f(u_k) \in \mathbb{I}$ car $u_k \in \mathbb{I}$ et $f(\mathbb{I}) \subset \mathbb{I}$ CQFD

Etape 3: d'après étape 1 et étape 2, on peut conclure que la propriété est vraie pour tout entier naturel n

b) On suppose que $\forall x \in \mathbb{I} f(x) \leq x$. Justifier que (u_n) est décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$ car $\forall n \in \mathbb{N} u_n \in \mathbb{I}$ et que $\forall x \in \mathbb{I} f(x) \leq x$
donc (u_n) est décroissante

c) Que peut-on dire de (u_n) si on suppose que $\forall x \in \mathbb{I} f(x) \geq x$.

$\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ car $\forall n \in \mathbb{N} u_n \in \mathbb{I}$ et que $\forall x \in \mathbb{I} f(x) \geq x$
donc (u_n) est croissante

3°) On suppose que f est croissante sur \mathbb{I}

a) Démontrer que si $u_0 \leq u_1$ alors la suite (u_n) est croissante

Démontrons par récurrence que $u_{n+1} \geq u_n$.

Etape 1 : $u_1 \geq u_0$

Etape 2 : soit un entier $k \geq 0$. supposons $u_k \geq u_{k+1}$

alors comme f est croissante, on a $f(u_k) \geq f(u_{k+1})$ donc $u_{k+1} \geq u_{k+2}$

Etape 3 : d'après les étapes 1 et 2, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ donc la suite (u_n) est croissante

b) Démontrer que si $u_0 \geq u_1$ alors la suite (u_n) est décroissante

On le démontre par récurrence.

Etape 1 : $u_1 \leq u_0$

Etape 2 : soit un entier $k \geq 0$. supposons $u_{k+1} \leq u_k$

alors comme f est décroissante, on a $f(u_{k+1}) \geq f(u_k)$ donc $u_{k+2} \geq u_{k+1}$

Etape 3 : d'après les étapes 1 et 2, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante

Application : Soit la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n$$

a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} u_n$ existe et est ≥ 0

Etape 1 : $u_0 = 0$ donc u_0 existe et est ≥ 0

Etape 2 : soit un entier $k \geq 0$. supposons u_k existe et est ≥ 0

alors $2 + u_k \geq 0$ donc $\sqrt{2 + u_k}$ existe et est ≥ 0 donc (u_{k+1}) existe et est ≥ 0 donc $u_{k+2} \geq u_{k+1}$

Etape 3 : d'après les étapes 1 et 2, $\forall n \in \mathbb{N} u_n$ existe et est ≥ 0

b) Si l'on suppose que (u_n) converge, quelle serait sa limite L ?

si (u_n) avait pour limite L , comme $\forall n \in \mathbb{N} u_n \geq 0$ on aurait $L \geq 0$. Or $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \sqrt{2 + x}$

on aurait par passage à la limite à cause de la continuité de f sur \mathbb{R}^+ car h est continue sur $]-2; +\infty[$, $L = \sqrt{2+L}$ donc $L^2 = 2+L$ donc $L^2 - L - 2 = 0$ donc $L = -1$ ou $L = 2$. Or $L \geq 0$ donc $L = 2$

Méthode 1

c1) Démontrer par récurrence que (u_n) est majorée par 2

Etape 1 : $u_0 = 0$ donc $u_0 \leq 2$

Etape 2 : soit un entier $k \geq 0$. supposons $u_k \leq 2$ alors $2 + u_k \leq 4$ donc $\sqrt{2 + u_k} \leq \sqrt{4}$
donc $u_{k+1} \leq 2$

Etape 3 : d'après les étapes 1 et 2, $\forall n \in \mathbb{N}$ (u_n) est majorée par 2

d1) Démontrer que (u_n) est croissante

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2 + u_n} - u_n = \frac{2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} = \frac{N}{D}$$

$D > 0$ car $\sqrt{2 + u_n} + u_n > 0$ puisque $u_n \geq 0$ et $\sqrt{2 + u_n} > 0$ puisque $\sqrt{2 + u_n} \geq \sqrt{2}$ car $2 + u_n \geq 2$

$N = T(u_n)$ où $T(X)$ est le trinôme $-X^2 + X + 2$ de racines -1 et 2 donc $T(X)$ est positif entre les racines -1 et 2 . Or $0 \leq u_n \leq 2$ donc $u_n \in [-1; 2]$ donc $N = T(u_n) \geq 0$

Donc $\frac{N}{D} \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc (u_n) est croissante

e1) Conclure

(u_n) est croissante et majorée donc est convergente vers L . Or nous avons vu que si sa limite L existe alors c'est $L = 2$. Donc (u_n) converge vers 2

Méthode 2

c2) Démontrer que $[0; 2]$ est stable par f

Soit $I = [0; 2]$ Démontrons que $f(I) \subset I$.

soit $x \in I$ donc $0 \leq x \leq 2$ donc $2 \leq 2 + x \leq 4$ donc $\sqrt{2} \leq \sqrt{2 + x} \leq \sqrt{4}$ donc $0 \leq \sqrt{2 + x} \leq 2$ donc $f(x) \in I$

d2) Démontrer que $\forall x \in [0; 2]$ $f(x) \geq x$

$$f(x) - x = \sqrt{2 + x} - x = \frac{2 + x - x^2}{\sqrt{2 + x} + x} = \frac{N}{D}$$

$D > 0$ car $\sqrt{2 + x} + x > 0$ puisque $x \geq 0$ et $\sqrt{2 + x} > 0$ puisque $\sqrt{2 + x} \geq \sqrt{2}$ car $2 + x \geq 2$

$N = T(x)$ où $T(X)$ est le trinôme $-X^2 + X + 2$ de racines -1 et 2 donc $T(X)$ est positif entre les racines -1 et 2 . Or $0 \leq x \leq 2$ donc $x_n \in [-1; 2]$ donc $N = T(x) \geq 0$

Donc $\frac{N}{D} \geq 0$ donc $f(x) - x \geq 0$ donc $f(x) \geq x$

e2) Conclure

D'après 2°) b) on peut conclure que (u_n) est croissante.

D'après 2°) a) et 3°) c2) on peut conclure que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [0; 2]$

Donc u_n est croissante et majorée par 2 donc est convergente vers L .

Or nous avons vu que si sa limite L existe alors c'est $L = 2$. Donc (u_n) converge vers 2

Méthode 3

c3) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - 2|$

Nous allons utiliser l'inégalité des accroissements finis qui dit que :

Si f est continue sur $[a; b]$

Si f dérivable sur $]a ; b [$

Si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]a ; b [|f'(x)| \leq M$

Alors $|f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$

$$x \geq 0 \text{ et } \sqrt{2+x} \geq \sqrt{2} \text{ car } 2+x \geq 2 \text{ donc } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Or } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ car } \sqrt{2} \geq 1. \text{ De plus } 0 \leq f'(x)$$

Donc f est continue sur $[0 ; 2]$ et f dérivable sur $]0 ; 2 [$ et $\exists M = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0 ; 2]$

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

Or $u_n \in [0 ; 2]$ ainsi que $2 \in [0 ; 2]$. De plus $f(2) = 2$. On peut alors appliquer l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle de bornes u_n et 2

$$\text{donc } |u_{n+1} - 2| = |f(u_n) - f(2)| \leq \frac{1}{2} |u_n - 2|$$

d3) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} 0 \leq |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$

$$\text{Etape 1 : } |u_0 - 2| = |0 - 2| = 2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - 2| = 1 |0 - 2| = 2$$

$$\text{De plus donc } 0 \leq |u_0 - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - 2|$$

$$\text{Etape 2 : soit un entier } k \geq 0. \text{ supposons } 0 \leq |u_k - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k |u_0 - 2|$$

$$\text{Or } 0 \leq |u_{k+1} - 2| \leq \frac{1}{2} |u_k - 2| \text{ donc } |u_{k+1} - 2| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^k |u_0 - 2|$$

$$\text{Donc } 0 \leq |u_{k+1} - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} |u_0 - 2|$$

$$\text{Etape 3 : d'après les étapes 1 et 2, } \forall n \in \mathbb{N} 0 \leq |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$$

e3) Conclusion

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2| = 0$ donc d'après le théorème des gers

d'armes, on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - 2| = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 2 = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ donc la suite (u_n) converge vers 2

4°) On suppose que f est décroissante sur I

a) Démontrer que $f \circ f$ est croissante sur I

Soient $x \in I$ et $x' \in I$ tels que $x < x'$. Comme f est décroissante alors $f(x) \geq f(x')$. Mais alors comme f est décroissante alors $f(f(x)) \leq f(f(x'))$

b) Démontrer que si $u_0 \leq u_2$ alors (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante

Démontrons par récurrence que $u_{2(n+1)} \geq u_{2n}$.

$$\text{Etape 1 : } u_2 \geq u_0$$

$$\text{Etape 2 : soit un entier } k \geq 0. \text{ supposons } u_{2(k+1)} \geq u_{2k}$$

$$\text{alors comme } f \circ f \text{ est croissante, on a } (f \circ f)(u_{2k+2}) \geq (f \circ f)(u_{2k}) \text{ donc } u_{2k+4} \geq u_{2k+2}$$

donc $u_{2(k+1)+1} \geq u_{2(k+1)}$

Etape 3 : d'après les étapes 1 et 2, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)} \geq u_{2n}$ donc la suite (u_{2n}) est croissante

Démontrons par récurrence que $u_{2(n+1)+1} \leq u_{2n+1}$.

Etape 1 : $u_3 \leq u_1$. En effet, $u_2 \geq u_0$ et comme f est décroissante alors $f(u_2) \leq f(u_0)$

donc $u_3 \leq u_1$

Etape 2 : soit un entier $k \geq 0$. supposons $u_{2(k+1)+1} \leq u_{2k+1}$.

Donc $u_{2k+3} \leq u_{2k+1}$ comme f est croissante, alors $(f \circ f)(u_{2k+3}) \leq (f \circ f)(u_{2k+1})$

donc $u_{2k+5} \geq u_{2k+3}$

donc $u_{2(k+1)+1} \geq u_{2(k+1)}$

Etape 3 : d'après les étapes 1 et 2, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)+1} \leq u_{2n+1}$ donc la suite (u_{2n+1}) est décroissante

c) **Démontrer que si $u_0 \geq u_2$ alors (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) est croissante**

Démontrons par récurrence que $u_{2(n+1)} \leq u_{2n}$.

Etape 1 : $u_0 \geq u_2$

Etape 2 : soit un entier $k \geq 0$. supposons $u_{2(k+1)} \leq u_{2k}$

alors comme $f \circ f$ est croissante, on a $(f \circ f)(u_{2k+2}) \leq (f \circ f)(u_{2k})$ donc $u_{2k+4} \leq u_{2k+2}$

donc $u_{2(k+1)} \leq u_{2k}$

Etape 3 : d'après les étapes 1 et 2, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)} \leq u_{2n}$ donc la suite (u_{2n}) est décroissante

Démontrons par récurrence que $u_{2(n+1)+1} \geq u_{2n+1}$.

Etape 1 : $u_3 \geq u_1$. En effet, $u_0 \geq u_2$ et comme f est décroissante alors $f(u_0) \leq f(u_2)$

donc $u_1 \leq u_3$

Etape 2 : soit un entier $k \geq 0$. supposons $u_{2(k+1)+1} \geq u_{2k+1}$.

Donc $u_{2k+3} \geq u_{2k+1}$ comme f est croissante, alors $(f \circ f)(u_{2k+3}) \geq (f \circ f)(u_{2k+1})$

donc $u_{2k+5} \geq u_{2k+3}$

donc $u_{2(k+1)+1} \geq u_{2(k+1)}$

Etape 3 : d'après les étapes 1 et 2, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)+1} \geq u_{2n+1}$ donc la suite (u_{2n+1}) est croissante

On retiendra que si f est décroissante sur I alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie contraire.

Application :

Soit la suite u_n définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n} \end{cases}$$

Soit f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$

Méthode 1

a) **Démontrer que f est décroissante sur \mathbb{R}^***

f est une fonction rationnelle donc est dérivable sur \mathbb{R}^* donc sur \mathbb{R}^+^*

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\frac{2}{x^2} < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

b) **Démontrer que $I = [1; 3]$ est stable par f**

Soit $I = [1; 3]$ Démontrons que $f(I) \subset I$.

soit $x \in I$ donc $1 \leq x \leq 3$ donc $\frac{1}{3} \leq 1/x \leq 1$ donc $\frac{2}{3} \leq \frac{2}{x} \leq 2$

$$\text{donc } 1 + \frac{2}{3} \leq 1 + \frac{2}{x} \leq 1 + 2 \quad \text{donc } \frac{5}{3} \leq f(x) \leq 3 \quad . \text{ Or } 1 \leq \frac{5}{3} \quad \text{donc } f(x) \in I$$

c) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} u_n$ existe et est > 0

Etape 1 : $u_0 = 1$ donc u_0 existe et est > 0

Etape 2 : soit un entier $k \geq 0$. supposons u_k existe et est > 0

alors $\frac{2}{u_k} > 0$ donc $1 + \frac{2}{u_k}$ existe et est > 0 donc u_{k+1} existe et est > 0

Etape 3 : d'après les étapes 1 et 2, $\forall n \in \mathbb{N} u_n$ existe et est > 0

d) Si (u_n) convergeait, quelle serait sa limite L ?

si (u_n) avait pour limite L , comme $\forall n \in \mathbb{N} u_n > 0$ on aurait $L > 0$.

$$\text{Or } u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où } f(x) = 1 + \frac{2}{x}$$

on aurait par passage à la limite à cause de la continuité de f sur \mathbb{R}^{+*} car f est dérivable sur

$$]0 ; +\infty [, \quad L = 1 + \frac{2}{L} \quad \text{donc } L = \frac{L+2}{L} \quad \text{donc } L^2 = L+2 \quad \text{donc } L^2 - L - 2 = 0 \quad \text{donc } L = -1 \text{ ou } L = 2. \quad \text{Or } L > 0$$

donc $L = 2$

a) Démontrer que (u_{2n}) est croissante

$$u_0 = 1 ; u_1 = 3 \text{ et } u_2 = \frac{5}{3} \text{ comme } f \text{ est décroissante sur } I \text{ et comme } u_0 \leq u_2 \text{ alors } (u_{2n}) \text{ est}$$

croissante

b) Démontrer que (u_{2n+1}) est décroissante

$$u_0 = 1 ; u_1 = 3 \text{ et } u_2 = \frac{5}{3} \text{ comme } f \text{ est décroissante sur } I \text{ et comme } u_0 \leq u_2 \text{ alors } (u_{2n}) \text{ est}$$

croissante

c) En déduire que (u_{2n}) converge vers L' et que (u_{2n+1}) converge vers L''

Comme $I =]1 ; 3 [$ est stable par f , comme $u_0 = 1 \in I$ et comme pour tout entier naturel $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut aisément démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} u_n \in I$

Donc (u_{2n}) est croissante et majorée par 3 donc converge vers L'

et que (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par 1 donc converge vers L''

d) Démontrer que $L = L'$

Comme $u_{2n+1} = f(u_{2n})$ alors par passage à la limite $L'' = 1 + 2/L'$ donc $L'L'' = L' + 2$

Comme $u_{2n} = f(u_{2n-1})$ alors par passage à la limite $L' = 1 + 2/L''$ donc $L'L'' = L'' + 2$

$$\text{Donc } L' + 2 = L'' + 2 \quad \text{donc } L' = L''$$

e) En déduire que (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

Comme les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite $L' = L''$ alors (u_n) converge vers L' qui ne peut être que 2 d'après la question d)

Méthode 2

a) Démontrer que f est décroissante sur \mathbb{R}^{+*}

f est une fonction rationnelle donc est dérivable sur \mathbb{R}^* donc sur \mathbb{R}^{+*}

$$\text{Pour tout } x > 0, \quad f'(x) = -\frac{2}{x^2} < 0 \quad \text{donc } f \text{ est strictement décroissante sur }]0 ; +\infty [$$

b) Déterminer f o f

$$(f \circ f)(x) = 1 + \frac{2}{f(x)} = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} = 1 + \frac{2}{\frac{x+2}{x}} = 1 + \frac{2x}{x+2} = \frac{3x+2}{x+2}$$

c) Si (u_n) convergeait, quelle serait sa limite L ?

si (u_n) avait pour limite L, comme $\forall n \in \mathbb{N} u_n > 0$ on aurait $L > 0$.

Or $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$

on aurait par passage à la limite à cause de la continuité de f sur \mathbb{R}^{+*} car f est dérivable sur

$]0; +\infty[$, $L = 1 + \frac{2}{L}$ donc $L = \frac{L+2}{L}$ donc $L^2 = L+2$ donc $L^2 - L - 2 = 0$ donc $L = -1$ ou $L = 2$. Or $L > 0$

donc $L = 2$

d) Démontrer que pour tout entier naturel on a $u_n > 0$

Etape 1 : $u_0 = 1$ donc u_0 existe et est > 0

Etape 2 : soit un entier $k \geq 0$. supposons u_k existe et est > 0

alors $\frac{2}{u_k} > 0$ donc $1 + \frac{2}{u_k}$ existe et est > 0 donc u_{k+1} existe et est > 0

Etape 3 : d'après les étapes 1 et 2, $\forall n \in \mathbb{N} u_n$ existe et est > 0

e) Démontrer que (u_{2n}) est croissante et majorée par 2

$u_0 = 1$; $u_1 = 3$ et $u_2 = \frac{5}{3}$ comme f est décroissante sur I et comme $u_0 \leq u_2$ alors (u_{2n}) est

croissante

On démontre par récurrence que (u_{2n}) est majorée par 2.

$u_2 = \frac{5}{3} \leq 2$. De plus supposons que pour tout entier naturel k l'on a $u_{2k} \leq 2$

alors $u_{2(k+1)} - 2 = (f \circ f)(u_{2k}) - 2 = \frac{3u_{2k} + 2}{u_{2k} + 2} - 2 = \frac{u_{2k} - 2}{u_{2k} + 2} \leq 0$ car $u_{2k} \leq 2$ et $u_{2k} + 2 > 0$

car $\forall n \in \mathbb{N} u_n > 0$

donc $u_{2(k+1)} \leq 2$

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N} u_{2n} \leq 2$

f) Démontrer que (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par 2

$u_0 = 1$; $u_1 = 3$ et $u_2 = \frac{5}{3}$ comme f est décroissante sur I et comme $u_0 \leq u_2$ alors (u_{2n}) est

croissante.

On démontre par récurrence que (u_{2n+1}) est minorée par 2.

$2 \leq u_1$.

De plus supposons que pour tout entier naturel k l'on a $2 \leq u_{2k+1}$

alors $u_{2(k+1)+1} - 2 = (f \circ f)(u_{2k+1}) - 2 = \frac{3u_{2k+1} + 2}{u_{2k+1} + 2} - 2 = \frac{u_{2k+1} - 2}{u_{2k+1} + 2} \geq 0$ car $2 \leq u_{2k+1}$ et $u_{2k+1} + 2 > 0$

car $\forall n \in \mathbb{N} u_n > 0$

donc $2 \leq u_{2(k+1)+1}$

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N} 2 \leq u_{2n+1}$

g) En déduire que (u_{2n}) converge vers L' et que (u_{2n+1}) converge vers L''

Donc (u_{2n}) est croissante et majorée par 2 donc converge vers L'

et que (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par 2 donc converge vers L''

h) Démontrer que $L' = (f \circ f)(L')$ et que $L'' = (f \circ f)(L'')$ puis que $L' = L''$

$u_{2n+2} = (f \circ f)(u_{2n})$ donc par passage à la limite $L' = (f \circ f)(L')$ donc $L' = \frac{3L' + 2}{L' + 2}$ donc

i) $L'^2 + 2L' = 3L' + 2$ donc $L'^2 - L' - 2 = 0$ donc $L' = -1$ ou $L' = 2$. Or $\forall n \in \mathbb{N} u_n > 0$ donc $L' = 2$

$u_{2n+3} = (f \circ f)(u_{2n+1})$ donc par passage à la limite $L'' = (f \circ f)(L'')$ donc $L'' = \frac{3L'' + 2}{L'' + 2}$ donc

$L''^2 + 2L'' = 3L'' + 2$ donc $L''^2 - L'' - 2 = 0$ donc $L'' = -1$ ou $L'' = 2$. Or $\forall n \in \mathbb{N} u_n > 0$ donc $L'' = 2$
donc $L' = L'' = 2$

j) En déduire que (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

Comme les 2 suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers 2 alors (u_n) converge vers 2