Méthode de Newton-Raphson

1°) Comme f est dérivable en x_0 alors la courbe de f admet au point $M(x_0,f(x_0))$ une tangente (T) d'équation $\mathbf{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

2°) f' ne s'annule jamais sur I donc $f'(x_0) \neq 0$ donc la tangente (T) n'est pas parallèle à l'axe des abscisses donc elle coupe l'axe des abscisses en un point x solution de l'équation

$0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ donc $-f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0)$

donc $x - x_0 = \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ car $f'(x_0) \neq 0$ d'où $x = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

L'abscisse x_1 du point d'intersection de (T) et de l'axe des abscisses

vérifie la relation suivante : $\mathbf{x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$. Cette procédure s'appelle la procédure de Newton-Raphson.

b) $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{2})^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$. Seul $\sqrt{2} \in I$ donc $\mathbf{c = \sqrt{2}}$

c) Prouver que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construite est définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right) \end{cases}$$

$x_0 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \dfrac{2x_n^2 - x_n^2 + 2}{2x_n} = \dfrac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$

d) Vers quelle valeur semble converger cette suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Sous Maple, la séquence d'instructions suivante :

```
ytangente:= a -> f(a)+(D(f)(a))*(x-a);
intersectiontangenteavecaxeox := expand(solve(ytangente(a),x));
newton := unapply(intersectiontangenteavecaxeox,a);
x[0] := 2;
for i from 1 to 10 do x[i] := evalf(newton(x[i-1]),10) od;
```

donne les valeurs suivantes :

x[0] ≈ 2 ; x[1] ≈ 1.500000000 ; x[2] ≈ 1.416666667 ; x[3] ≈ 1.414215686;

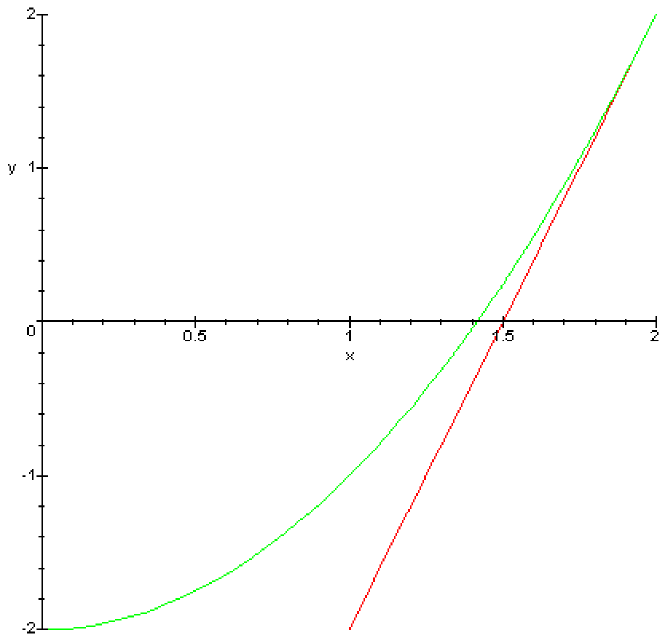
x[4] ≈ 1.414213562 ; x[5] ≈ 1.414213562 ; x[6] ≈ 1.414213562;

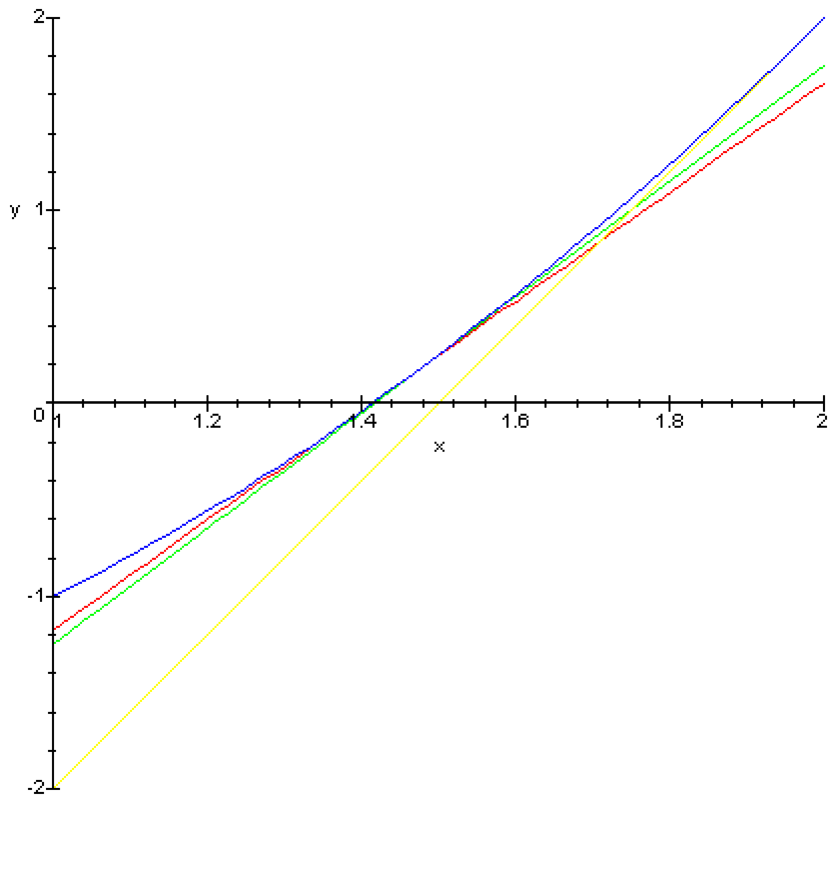
x[7] ≈ 1.414213562 ; x[8] ≈ 1.414213562 ; x[9] ≈ 1.414213562 ; x[10] ≈ 1.414213562

La suite (x_n) semble converger vers 2

Exemple 1

a) Faire un dessin pour la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2$ sur I = [1 ; 2]





Exemple 2

1°) Soit la fonction f définie par $f(x) = 1 - x + \frac{1}{\sqrt{x}}$

a) Démontrer que f réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$

car f est la somme de la fonction affine $x \dashrightarrow 1 - x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0\,;+\infty[$

et de la fonction $x \dashrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui est dérivable sur $]0\,;+\infty[$

car $x \dashrightarrow \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et ne s'y annule jamais

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = -1 - \frac{1}{2x\sqrt{x}} < 0$ car $-1 < 0$ et $-2x\sqrt{x} < 0$ car $x > 0$

donc f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$

Or f est continue sur $]0\,;+\infty[$ car f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$

f étant continue et strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$

alors f est une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $f(]0\,;+\infty[) = \mathbb{R}$

car $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

En effet,

quand x tend vers 0^+, $1 - x$ tend vers 1 et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers $+\infty$ car $\sqrt{x}$ tend vers 0+

Quand x tend vers $+\infty$, $1 - x$ tend vers $+\infty$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers 0+ car $\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$

b) Démontrer que $f(x) = 0$ admet une solution unique c dans $]1\,;2[$

$f(1) = 1$ et $f(2) = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.29$

Comme f est continue sur $[1\,;2]$ car f est continue sur $]0\,;+\infty[$ alors f prend toute valeur intermédiaire entre f(1) et f(2) . Or $f(2) < 0 < f(1)$ donc il existe un c dans $]1\,;2[$ tel que $f(c) = 0$

Or f est continue et strictement décroissante sur $]1\,;2[$ donc f réalise une bijection de $]1\,;2[$ sur $]f(2);f(1)[$. 0 qui appartient à $]f(2);f(1)[$ a donc un antécédent unique c dans $]1\,;2[$

c) Démontrer que si $x \in [1\,;2]$ alors $1 < |f'(x)|$

$1 \le x \le 2$ donc $1 \le \sqrt{x} \le \sqrt{2}$ donc $1 \le x\sqrt{x} \le 2\sqrt{2}$

Or $1 \le x \le 2$

donc $2 \le 2x\sqrt{x} \le 4\sqrt{2}$

donc $\frac{1}{4\sqrt{2}} \le \frac{1}{2x\sqrt{x}} \le \frac{1}{2}$

donc $1 + \frac{1}{4\sqrt{2}} \le 1 + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \le 1 + \frac{1}{2}$

donc $1 + \frac{1}{4\sqrt{2}} \le |f'(x)| \le \frac{3}{2}$

Or $1 + \frac{1}{4\sqrt{2}} \approx 1{,}35$ et $\frac{3}{2} = 1{,}5$ **donc $1 < |f'(x)|$**

d) Démontrer que si $x \in [1 ; 2]$ alors $|f(x)| \leq 1$

$1 \leq x \leq 2$ donc $-1 \geq -x \geq -2$ donc $1 - 1 \geq 1 - x \geq 1 - 2$ donc $-1 \leq 1 - x \leq 0$

$1 \leq x \leq 2$ donc $1 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{2}$ donc $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{1}$

donc $-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq f(x) \leq 1$

Or $-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.29$ **donc $|f(x)| \leq 1$**

e) Démontrer que f' est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et que si $x \in [1 ; 2]$ alors $|f''(x)| \leq \frac{3}{4}$

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = -1 - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

f' est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ car

f est la somme de la fonction constante $x \to -1$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0 ;+\infty[$

et de la fonction $x \to -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ qui est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

car $x \to 2x\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et ne s'y annule jamais

Pour tout $x > 0$, $f''(x) = \frac{3}{4}\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

$1 \leq x \leq 2$ donc $1 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{2}$

$1 \leq x \leq 2$ donc $1 \leq x^2 \leq 4$

donc $1 \leq x^2\sqrt{x} \leq 4\sqrt{2}$

donc $1 \geq \frac{1}{x^2\sqrt{x}} \geq \frac{1}{4\sqrt{2}}$

donc $\frac{1}{4\sqrt{2}} \leq \frac{1}{x^2\sqrt{x}} \leq 1$

$\frac{3}{4}\frac{1}{4\sqrt{2}} \leq \frac{3}{4}\frac{1}{x^2\sqrt{x}} \leq 1\frac{3}{4}$

donc $\frac{3}{4}\frac{1}{4\sqrt{2}} \leq f''(x) \leq \frac{3}{4}$

Or $\frac{3}{4}\frac{1}{4\sqrt{2}} \approx 0,26$ **donc $|f''(x)| \leq \frac{3}{4}$**

3°) Soit la fonction notée newton définie par $newton(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

a) démontrer que newton(x) existe bien pour tout $x > 0$

pour tout $x > 0$, f(x)et f'(x) existent. De plus pour tout $x > 0$ l'on sait que $f'(x) \neq 0$ donc newton(x) existe

b) démontrer que newton est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

newton est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ car newton est la somme de

la fonction constante $x \dashrightarrow x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0 ;+\infty[$

et de la fonction $x \dashrightarrow -\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ qui est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

car f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

ainsi que f'

avec en plus $f'(x)$ qui ne s'annule jamais sur $]0 ; +\infty[$

c) démontrer que pour tout $x > 0$, on a $\text{newton}'(x) = \dfrac{f(x)\,f''(x)}{(f'(x))^2}$

$$\text{Pour tout } x > 0,\ \text{newton}'(x) = 1 - \frac{(f'(x)f'(x) - f(x)f''(x))}{(f'(x))^2}$$
$$= \frac{(f'(x))^2 - (f'(x))^2 + f(x)\,f''(x)}{(f'(x))^2}$$
$$= \frac{f(x)\,f''(x)}{(f'(x))^2}$$

d) Résoudre sur $[1 ; 2]$:

- l'équation suivante $\text{newton}(x) = x$
- l'inéquation suivante $\text{newton}(x) > x$
- l'inéquation $\text{newton}(x) < x$

pour tout x de $[1 ; 2]$,

$\textbf{newton(x)} = \mathbf{x} \Leftrightarrow x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = x \Leftrightarrow -\dfrac{f(x)}{f'(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = c}$ d'après 1°) b)

$\textbf{newton(x)} > \mathbf{x} \Leftrightarrow x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} > x \Leftrightarrow -\dfrac{f(x)}{f'(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$ car $f'(x) < 0$

$\Leftrightarrow \mathbf{1 \leq x < c}$ d'après la décroissance de f sur $[1 ;2]$

$\textbf{newton(x)} < \mathbf{x} \Leftrightarrow x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} < x \Leftrightarrow -\dfrac{f(x)}{f'(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$ car $f'(x) < 0$

$\Leftrightarrow \mathbf{c < x \leq 2}$ d'après la décroissance de f sur $[1 ;2]$

e) Démontrer que l'intervalle $I = [1 ; c]$ est stable par la fonction newton

Soit $x \in [1 ; c]$ alors $f(x) \geq 0$. Or $f''(x) > 0$

donc $\text{newton}'(x) = \dfrac{f(x)\,f''(x)}{(f'(x))^2} \geq 0$ donc newton est croissante

donc $\text{newton}(1) \leq \text{newton}(x) \leq \text{newton}(c)$

Or $\text{newton}(1) = 1 - \dfrac{f(1)}{f'(1)} = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$

$\text{newton}(c) = c - \dfrac{f(c)}{f'(c)} = c - 0 = c$ car $f(c) = 0$

$\dfrac{5}{3} \leq \text{newton}(x) \leq \text{newton}(c)$ Or $1 \leq \dfrac{5}{3}$ donc $\mathbf{1 \leq newton(x) \leq c}$

f) Soit la suite$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = newton(u_n) \end{cases}$

- démontrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ u_n \in I$

La démonstration est faite par récurrence. Notons pr(n):" $u_n \in I$"

étape 1 : pr(0) est vraie car $u_0 \in I$ puisque I = [1 ; c] et $u_0 = 1$

étape 2 : soit k $\in \mathbb{N}^*$ supposons que pr(k) est vraie donc $u_k \in I$. Or f<I> $\subset$ I donc $f(u_n) \in I$.

Or $u_{k+1} = f(u_k)$ donc $u_k \in I$ donc pr(k+1) est vraie.

Conclusion : d'après étape 1 et étape 2 alors pr(n) est vraie pour tout entier naturel n.

g) démontrer que la suite (u_n) est croissante

$u_{n+1} - u_n = newton(u_n) - u_n > 0$ car $u_n \in I$ et que $newton(x) > x$ lorsque $x \in I$

- déduire du 1°) c) et 1°) d) que si $x \in [\ 1\ ;\ 2\ ]$ alors $|newton'(x)| \le \frac{3}{4}$

soit $x \in [\ 1\ ;\ 2]$

alors $newton'(x) = \dfrac{f(x)\ f''(x)}{(f'(x))^2}$ donc $|\ newton'(x)\ | = \left|\dfrac{f(x)\ f''(x)}{(f'(x))^2}\right| = \dfrac{|f(x)|\ \ |f''(x)|}{|\ (f'(x))^2\ |}$

$1 < |f'(x)|$ donc $1 < |f'(x)|^2$. On en déduit que $\dfrac{1}{|\ f'(x)\ |^2} < 1$

Or $|f(x)| \le 1$ et $|f''(x)| \le \frac{3}{4}$ donc $|f(x)|\ \ |f''(x)| \le 1\,\frac{3}{4}$

donc $|\ newton'(x)\ | = \left|\dfrac{f(x)\ f''(x)}{(f'(x))^2}\right| = \le \dfrac{3}{4}$

- démontrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ |\ u_n\ - c\ | \le (\frac{3}{4})^n\ |\ u_0\ - c\ |$

La démonstration est faite par récurrence. Notons pr(n):" $|\ u_n\ - c\ | \le (\frac{3}{4})^n\ |\ u_0\ - c\ |$"

étape 1 : pr(0) est vraie car $|\ u_0\ - c\ | = |\ u_0\ - c\ | = (\frac{3}{4})^0\ |\ u_0\ - c\ |$ car$(\frac{3}{4})^0 = 1$

donc $|\ u_0\ - c\ | \le (\frac{3}{4})^0\ |\ u_0\ - c\ |$

étape 2 : soit k $\in \mathbb{N}^*$ supposons que pr(k) est vraie c'est-à-dire que $|\ u_k - c\ | \le (\frac{3}{4})^k\ |u_0 - c\ |$

newton est dérivable sur I .Or si $x \in [\ 1\ ;\ 2\ ]$ alors $|newton'(x)| \le \frac{3}{4}$. Donc si $x \in$ I alors

$|newton'(x)| \le \frac{3}{4}$. Or $u_k \in I$, $c \in I$, $u_{k+1} = f(u_k) \in I$.

D'après l'inégalité des acroissements finis on a $|\ u_{k+1} - c\ | = |\ f(u_k) - f(c)\ | \le \frac{3}{4}\ |u_k - c\ |$

Or $|\ u_k - c\ | \le (\frac{3}{4})^k\ |u_0 - c\ |$ donc $|\ u_{k+1} - c\ | \le (\frac{3}{4})^{k+1}\ |u_0 - c\ |$ donc pr(k+1) est vraie.

Conclusion : d'après étape 1 et étape 2 alors pr(n) est vraie pour tout entier naturel n.

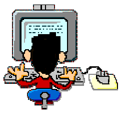
- en déduire que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ |\ u_n\ -c\ | \leq (\frac{3}{4})^n$ puis que la suite (u_n) converge vers c

$|\ u_n\ - c\ | \leq (\frac{3}{4})^n\ |\ u_0\ - c\ |$ Or $|\ u_0\ - c\ | \leq 1$ car $u_0 \in [\ 1\ ;\ 2]$ et $c \in [\ 1\ ;\ 2]$

donc $0 \leq |\ u_n\ - c\ | \leq (\frac{3}{4})^n$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{3}{4})^n = 0$ car $-1 < \frac{3}{4} < 1$ donc d'après le théorème des gendarmes

$\lim\limits_{n \to +\infty} |\ u_n\ - c\ | = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n\ - c\ = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n\ = c$



Algorithmique

Compléter le programme suivant en Turbo -Pascal réalisant cette méthode de Newton-Raphson afin de déterminer une valeur approchée x_n de c la racine de l'équation $x^3 - 4 = 0$

On entrera au clavier x_0 une approximation de la racine c. Le nombre d'itérations ne dépassera pas 100 .

```
Program NEWTON_RAPHSON;
  Uses WinCRT;   const  NBMAX = 100 ;
  type suite = array[0..NBMAX] of real;
  var u : suite;
        a : real;
        I : integer ;
  function f ( x. : real) : real ;
       begin
            f:=x^2 - 2
     end;
   function deriveedef( y : real) : real ;
        begin
            deriveedef:= 2 * y
        end;
begin
(* entrée des données *)
write('tapez une valeur pas trop éloignée de c');
readln(a);
(* traitement *)
u[0] := a ;
for I := 1 to NBMAX do u[I] := u[I-1]- f(u[I-1])/deriveedef(u[I-1]) ;
(* affichage des résultats *)
         writeln(' après ', I, 'itérations, c vaut à peu près ', u[NBMAX].:10:5);
end.
```

$f(x) = x^3 - 4$	$c \approx 1{,}58740$	en fait c = la racine cubique de 4
$f(x) = x^2 - 2$	$c \approx 1{,}41421$	en fait $c = \sqrt{2}$
$f(x) = x^3 - 2x - 5$	$c \approx 2{,}09455$	
$f(x) = x^2 - x - 1$	$c \approx 1{,}61803$	en fait c = le nombre d'or = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$f(x) = x^2 - 4\cos(x)$	$c \approx 1{,}20154$	