

Coût marginal et coût moyen

Christian CYRILLE

"Il ne s'agit ni de rire, ni de pleurer mais de comprendre"

Spinoza

Un fabricant de pièces de fonderies réalise une production mensuelle de q centaines de pièces d'un même modèle ($0 \leq q \leq 10$).

Le coût total de production, exprimé en milliers de francs, est donné par :

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q \text{ où } q \in [0; 10].$$

On assimile le coût marginal au rang q à la dérivée du coût total :

$$C_m(q) = C'(q) \text{ où } q \in [0; 10].$$

Le coût moyen, par centaine de pièces, est donné par :

$$C_M(q) = \frac{C(q)}{q} \text{ où } q \in]0; 10].$$

1. Exprimer le coût marginal $C_m(q)$ en fonction de q pour $q \in [0; 10]$.
2. Etudier ses variations et le représenter dans un repère orthogonal d'unités $1cm$ pour une centaine de pièces en abscisses et $1cm$ pour 10 milliers de francs en ordonnées. Soit (C') la courbe du coût marginal.
3. Exprimer le coût moyen $C_M(q)$ où $q \in]0; 10]$.
4. Etudier ses variations et le représenter dans le même graphique que le coût marginal. Soit (Γ) la courbe du coût moyen.
5. Vérifier que lorsque le coût moyen est minimal alors le coût moyen est égal au coût marginal. Quelle est alors la valeur de la production ?
6. De façon générale, en utilisant l'écriture $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$ sur $]0; +\infty[$ démontrer l'équivalence logique suivante :

$$C'_M(q) = 0 \Leftrightarrow C_m(q) = C_M(q)$$

7. Etudier les variations du coût total et le représenter dans un repère orthogonal d'unités $1cm$ pour une centaine de pièces et $1cm$ pour 20 milliers de francs en ordonnées. Soit (C) la courbe du coût total.
8. M étant le point d'abscisse q de la courbe (C) du coût total et O l'origine du repère, quel est le lien entre le coût moyen $C_M(q)$ et la droite (OM) ?
9. En utilisant la droite (OM) et la notion de tangente à la courbe (C) , expliquer comment retrouver graphiquement sur la courbe de coût total la production qui minimise le coût moyen.
10. De façon générale, démontrer que la tangente à la courbe de coût total au point d'abscisse q non nulle passe par l'origine si et seulement si

$$C_m(q) = C_M(q)$$