

LYCEE DE BELLEVUE - CLASSE PREPARATOIRE EC1 - ANNEE SCOLAIRE 2002-2003  
MATHEMATIQUES - PROFESSEUR : Christian CYRILLE



DEVOIR CLASSE N° 12 - CONCOURS BLANC MATHS 2- VENDREDI 20 DECEMBRE 2002  
Les parties A , B et C sont indépendantes. La calculatrice est autorisée.

Partie A

Léonard de Pise alias FIBONACCI (1526-1615) est un des mathématiciens italiens qui a d'abord étudié dans les universités arabes et ensuite a contribué au développement des mathématiques en Italie, à l'époque de la Renaissance.



Il est resté célèbre grâce au petit problème suivant :

Un couple de lapins est placé dans une garenne vide . Après 2 mois, c'est-à-dire au début du 3<sup>ème</sup> mois, il donne naissance à un autre couples de lapins, puis au début de chacun des mois suivants, il donne naissance à un autre couple de lapins.

Chacun des nouveaux couples engendre à son tour des couples de lapins suivant le même processus.

Tout ce petit monde vit dans la même garenne et n'est pas décimé par la maladie ou la mort.

On note  $Fib[n]$  le nombre de couples de lapins vivant dans la garenne au début du n-ième mois.

1°) Dessiner un arbre qui illustre bien la situation des 6 premiers mois en utilisant 2 types de branches :  $\longrightarrow$  (pour indiquer qu'un couple continue à vivre ) et  $\dashrightarrow$  (pour indiquer qu'un couple donne naissance à un couple de bébés) .

2°) En déduire les valeurs de  $Fib[n]$  pour n variant de 1 à 6.

3°) Déterminer en la justifiant la relation existant entre  $Fib[n]$ ,  $Fib[n-1]$  et  $Fib[n-2]$  pour tout entier naturel  $n \geq 3$

4°) Ecrivez un programme en Turbo Pascal qui permet de résoudre le problème suivant :  
Un utilisateur tape au clavier un nombre entier N de mois. Après traitement, l'ordinateur affichera à l'écran le nombre de couples de lapins existant dans la garenne au début du n-ième mois. L'algorithme que vous coderez n'utilisera que 5 variables ou cases-mémoires dont l'une s'appellera N et l'autre I pour la variable de boucle.

5°) Ecrivez un deuxième programme en Turbo-Pascal qui résoud le même problème mais dont l'algorithme du programme principal n'utilisera qu'une seule variable N et fera appel à une fonction récursive FIB

6°) Sachant qu'un bit est soit 0 ou 1 , qu'un octet est un ensemble de 8 bits

- Si un entier était codé sur un bit, combien d'entiers pourrait-t-on représenter en mémoire ?
- Si un entier était codé sur 2 bits, combien d'entiers pourrait-t-on représenter en mémoire ?
- Si un entier était codé sur 3 bits, combien d'entiers pourrait-t-on représenter en mémoire ?
- Si un entier était codé sur 1 octet, combien d'entiers pourrait-t-on représenter en mémoire ?
- Si un entier était codé sur 2 octets, combien d'entiers pourrait-t-on représenter en mémoire ?

7°) En Turbo-Pascal, sachant qu'une variable entier naturel de type word est codé sur 2 octets, si l'on déclare var N : word dans les deux programmes précédents

- Quelle est la fourchette exacte des valeurs disponibles pour N ?
- En vous aidant de votre calculatrice, expliquez pourquoi les deux programmes précédents ne marcheraient pas pour  $N > 23$

8°) En Turbo-Pascal, sachant qu'une variable entier relatif de type integer est codé sur 2 octets, mais que le bit situé le plus à gauche est réservé au signe ( 0 pour + et 1 pour -)

si l'on déclare var N : integer dans les deux programmes précédents

- Quelle est la fourchette exacte des valeurs disponibles pour N ?
- En vous aidant de votre calculatrice, expliquez pourquoi les deux programmes précédents ne marcheraient pas pour  $N > 22$
- Quelle solution proposeriez-vous pour éviter ces 2 écueils ?

9°) Proposez une amélioration de la partie (\*entrée des données \*) dans le cas où N est de type integer en utilisant juste :

- une boucle du type repeat .... until ...
- trunc(N) qui représente la partie entière de N

afin d'obliger l'utilisateur à entrer un entier compris entre 1 et 22

10°) Remplir le tableau suivant :

n	Fib[n]	Valeur exacte de $\frac{\text{Fib}[n+1]}{\text{Fib}[n]}$	Valeur approchée de $\frac{\text{Fib}[n+1]}{\text{Fib}[n]}$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			

- a) Que semble-t-il se passer pour la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $v_n = \frac{\text{Fib}[n+1]}{\text{Fib}[n]}$  ?
- b) Démontrer que pour tout  $n \geq 2$ , l'on a  $v_n = 1 + \frac{1}{v_{n-1}}$
- c) En supposant que la suite  $(v_n)$  converge, déterminer sa limite ?

### Partie B

Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = \frac{3}{2}$  et pour tout entier naturel  $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$

1°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  l'on a  $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$

2°) Soit l'intervalle  $I = [\frac{3}{2}; 2]$  et soit la fonction  $f$  définie sur  $I$  par  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

Démontrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique dans l'intervalle  $I$  dont on donnera la valeur exacte  $\alpha$ .

3°) Démontrer que pour tout  $x$  de  $I$  l'on a :  $f(x) \in I$  et  $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$

4°) On admettra l'inégalité dite des accroissements finis qui dit que si pour tout  $x$  appartenant à un intervalle  $I$  on a  $|f'(x)| \leq k$  alors on peut conclure que pour tous  $a$  et  $b$  de  $I$  l'on a l'inégalité suivante :  $|f(b) - f(a)| \leq k |b - a|$

a) en déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9} |u_n - \alpha|$

b) démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_n - \alpha| \leq (\frac{4}{9})^n |u_0 - \alpha|$

c) en déduire que pour tout  $n$ ,  $|u_n - \alpha| \leq (\frac{4}{9})^n$  puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

### Partie C

1°) a) Déterminer les solutions de l'équation d'inconnue réel  $x^2 - x - 1 = 0$

b) On notera  $\alpha$  et  $\beta$  ces deux solutions avec la convention  $\alpha > 0$ . Calculer alors  $\alpha + \beta$  et  $\alpha\beta$

2°) On considère la suite  $(F_n)_{n \geq 0}$  définie par  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , l'on a :  $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$

3°) On considère la suite  $(L_n)_{n \geq 0}$  définie par  $L_0 = 2$ ,  $L_1 = 1$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$

a) Soit la suite de terme général  $u_{n+1} = L_{n+1} - \alpha L_n$  pour tout entier  $n \geq 0$ . Montrer que  $(u_n)_{n \geq 1}$  est une suite géométrique de raison  $\beta$ .

b) Soit la suite de terme général  $v_{n+1} = L_{n+1} - \beta L_n$  pour tout entier  $n \geq 0$ . Montrer que  $(v_n)_{n \geq 1}$  est une suite géométrique de raison  $\alpha$ .

c) Déterminer  $u_n, v_n$  en fonction de  $n, \alpha$  et  $\beta$ .

d) En déduire que pour tout entier  $n \geq 0$ , l'on a :  $L_n = \alpha^n + \beta^n$

e) Démontrer que pour tout entier  $n \geq 0$ , l'on a :  $F_{2n} = L_n \times F_n$

f) On pose  $r_0 = 3$  et pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $r_{n+1} = r_n^2 - 2$

Démontrer par récurrence sur  $n$  que pour tout entier  $n \geq 0$  on a :  $r_n = L_{2^{n+1}}$  à la puissance  $(n+1)$

Démontrer que pour tout entier naturel  $N$  non nul l'on a : le produit des  $r_i$  de  $0$  à  $n-1$  est égale à  $F_{2^{n+1}}$  à la puissance  $(N+1)$

**THAT'S ALL FOLKS !!!**