ENSEMBLES

1°) Définition d'un ensemble

Un ensemble peut être déterminé :

- soit en extension lorsque le nombre de ses éléments n'est pas très élevé.
  On définit la liste de ses éléments
  ex : l'ensemble des résultats du jet d'un dé est $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$
- soit en compréhension par une propriété caractéristique
  ex : l'ensemble des entiers pairs

On appelle ensemble vide qu'on note $\varnothing$ un ensemble qui n'a aucun élément

2°) Appartenance

Lorsqu'un objet x appartient à un ensemble E , on écrit $x \in E$.
Dans le cas contraire on écrit $x \notin E$.

3°) Parties ou sous-ensembles d'un ensemble E

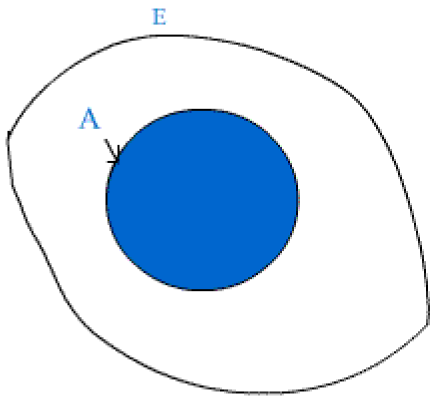
a) Définition

On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble E ou que A est une partie de E ou que A est un sous-ensemble de E lorsque la propriété suivante est vraie :

$\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in E$

On écrit alors $A \subset E$

Lorsque A est strictement inclus dans E, on écrit $A \subset E$



On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E

b) Exemples

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{N}$ = l'ensemble des entiers naturels = { 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ……………}

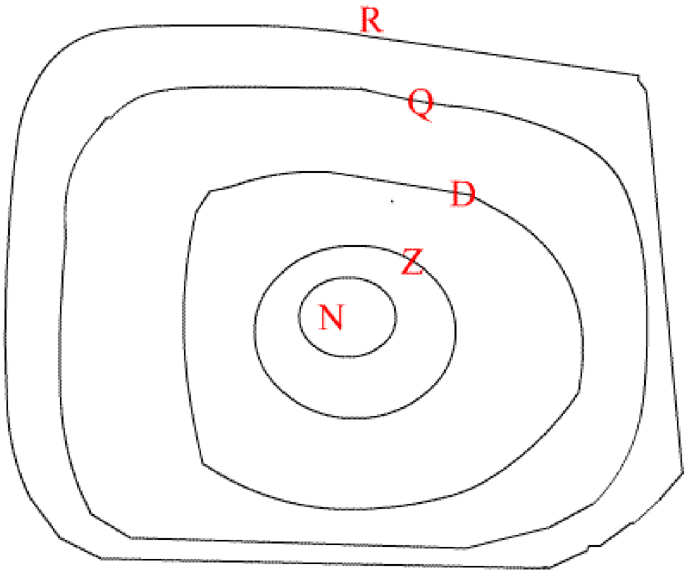
$\mathbb{Z}$ = l'ensemble des entiers relatifs = {……………; -6 ; -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ……………}

$\mathbb{D}$ = l'ensemble des nombres décimaux = l'ensembles des nombres avec un nombre fini de chiffres après la virgule = l'ensemble des nombres qui ont la forme suivante : $\dfrac{\text{entier relatif}}{\text{puissance positive de 10}}$

$\mathbb{Q}$ = l'ensemble des nombres rationnels = l'ensemble des nombres qui ont la forme suivante : $\dfrac{\text{entier relatif}}{\text{entier relatif non nul}}$

$\mathbb{R}$ = l' ensemble des nombres réels = $] -\infty ; +\infty [$

$\mathbb{C}$ = l'ensemble des nombres complexes = $\{ x + i y \,/\, x \in \mathbb{R} ; y \in \mathbb{R} ; i^2 = -1 \}$



l'ensemble des entiers naturels pairs (ou l'ensemble des multiples de 2) est

$\{ x = 2k \ / \ k \in \mathbb{N} \}$

l'ensemble des entiers naturels impairs est $\{ x = 2k + 1 \ / \ k \in \mathbb{N} \}$

c) Propriétés

P1 – Pour tout ensemble E , on a $\varnothing \subset E$

P2 – Pour tout ensemble E , on a $E \subset E$. E s'appelle la partie pleine de E

d) Exemples

Ex 1 Si E = {a ; b ; c } alors P(E) = { $\varnothing$; {a} ; {b} ; {c} ; {a,b} ; {a,c} ; {b,c} ; {a,b,c} }

Ex 2 Si E = { a ; b } alors P(E) = { $\varnothing$; {a} ; {b} ; {a,b} }

Ex 3 Si E = $\varnothing$ alors P(E) = { $\varnothing$ }

e) Propriétés

P3 – si E est un ensemble fini ayant n éléments alors l'ensemble P(E) de ses parties a 2^n éléments

démonstration :

Par récurrence

P4 – On appelle C_n^p le nombre de parties à p éléments d'un ensemble ayant n éléments

alors :

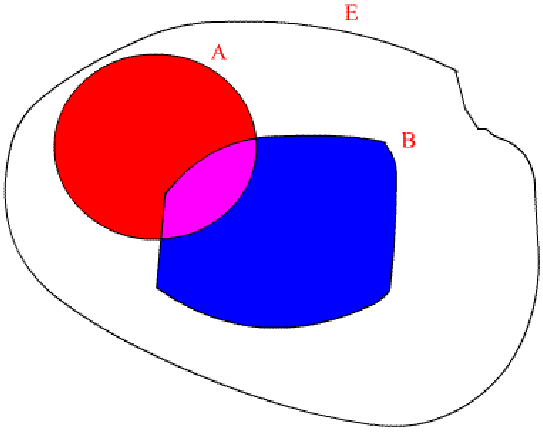
si p > n alors $C_n^p = 0$	1
pour tout entier naturel n, $C_n^0 = 1$	1 1
pour tout entier naturel n, $C_n^n = 1$	1 2 1
pour tout entier naturel n, $C_n^1 = n$	1 3 3 1
Pour tout p compris entre 0 et n, $C_n^p = C_n^{n-p}$	1 4 6 4 1
Pour tout p compris entre 0 et n $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$	1 5 10 10 5 1
pour tout entier naturel n, $\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$	

f) Opérations sur des ensembles

1. **Union**

   Si A et B sont des parties de E alors la réunion de A et de B qu'on note $A \cup B$ est la partie de E formée des éléments de A et des éléments de B

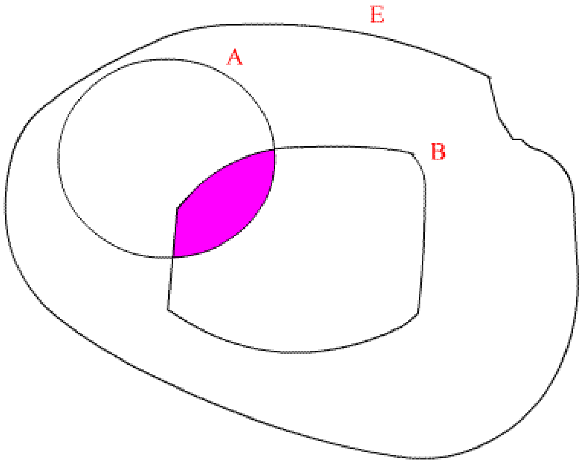
   Plus formellement $A \cup B = \{ x \in E \ / \ x \in A \text{ ou } x \in B\}$



2. **Intersection**

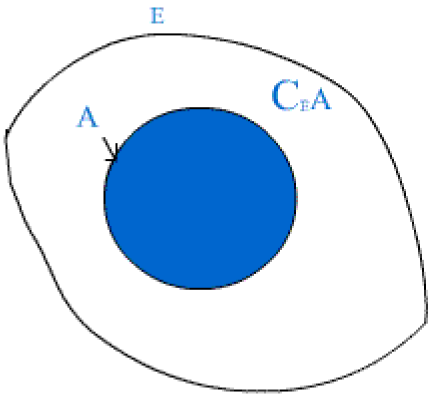
   Si A et B sont des parties de E alors l'intersection de A et de B qu'on note $A \cap B$ est la partie de E formée des éléments de A qui sont aussi des éléments de B

   Plus formellement $A \cap B = \{ x \in E \ / \ x \in A \text{ et } x \in B\}$



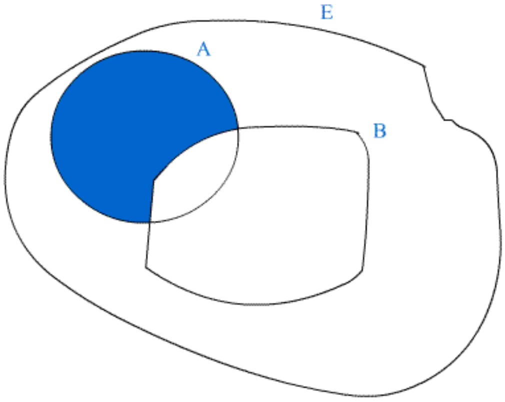
3. **Complémentaire**

   Si A est une partie de E , alors on appelle complémentaire de A dans E , la partie formée des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On note cette partie $\overline{A}$ ou C_E A



4. **Différence**

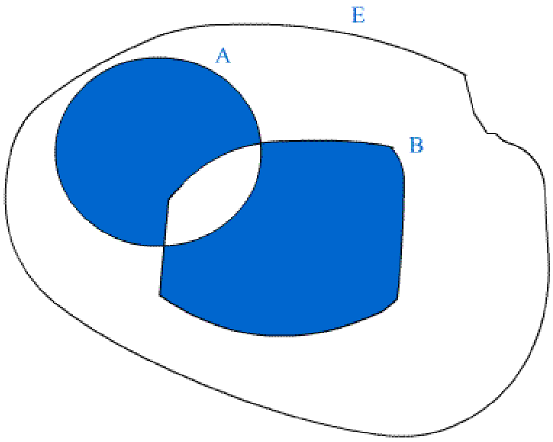
Si A et B sont des parties de E alors on appelle différence de A et B qu'on note $A - B$ ou $A \setminus B$ l'ensemble formé par les éléments de A n'appartenant pas à B



5. **Différence symétrique**

Si A et B sont des parties de E alors on appelle différence symétrique de A et B qu'on note $A \Delta B$ l'ensemble formé par les éléments appartenant à un et un seul des ensembles A et B

En fait, $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$



Propriétés les plus importantes :

Soit un ensemble E. Soient A et B des sous ensembles (ou des parties) de E.

$A \cup \varnothing = A$; $A \cup A = A$; $A \cup E = E$; $A \subset A \cup B$; $A \cup B = B \cup A$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cap A = A$; $A \cap E = A$; $A \cap B \subset A$; $A \cap B = B \cap A$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{A} \cap A = \varnothing$; $\overline{A} \cup A = E$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

g) **Produit cartésien de deux ensembles**

On appelle produit cartésien de deux ensembles E et F qu'on note $E \times F$, l'ensemble suivant $E \times F = \{ (x ; y) \text{ où } x \in E \text{ et } y \in F \}$.

C'est l'ensemble des couples où le premier élément appartient à E et le deuxième élément appartient à F

Lorsque $E = F$, $E \times E$ se note E^2

On peut généraliser ce produit cartésien :

à 3 ensembles E , F et G

$E \times F \times G = \{ (x ; y ; z)$ où $x \in E , y \in F$ et $z \in G\}$

C'est l'ensemble des tripletsoù le premier élément appartient à E, le deuxième élément appartient à F et le troisième élément appartient à G

à n ensembles $E_1 \times E_2 \times E_3 \times \ldots\ldots \times E_n$

$E \times E \times E \times \ldots\ldots \times E$ (n fois) se note E^n

Exemples :

Exemple 1 : $\{(x ; y) / x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R} \}$ se note $\mathbb{R}^2$

Exemple 2 : Lorsque l'on jette 2 dés , l'ensemble des résultats possibles est

$\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \} \times \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$ qu'on note encore { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }2

Ω est formé des 36 couples (1 ; 1) ; (1 ; 2) ; …… ; (6 ; 5) ; (6 ; 6) que l'on peut représenter par le tableau à 2 entrées ci-dessous :

dé 1 / dé 2	1	2	3	4	5	6
1	(1 ;1)	(1 ;2)	(1 ;3)	(1 ;4)	(1 ;5)	(1 ;6)
2	(2 ;1)	(2 ;2)	(2 ;3)	(2 ;4)	(2 ;5)	(2 ;6)
3	(3 ;1)	(3 ;2)	(3 ;3)	(3 ;4)	(3 ;5)	(3 ;6)
4	(4 ;1)	(4 ;2)	(4 ;3)	(4 ;4)	(4 ;5)	(4 ;6)
5	(5 ;1)	(5 ;2)	(5 ;3)	(5 ;4)	(5 ;5)	(5 ;6)
6	(6 ;1)	(6 ;2)	(6 ;3)	(6 ;4)	(6 ;5)	(6 ;6)

ou par le dessin suivant