

Exercices sur les Coniques

Christian CYRILLE

5 novembre 2008

"Racontez l'odyssée d'une jeune conique en mal d'excentricité qui, échappée de ses foyers, y est ramenée par une amie de la directrice grâce à un discours tantôt hyperbolique, tantôt elliptique, et une parabole bien choisie."

Sujet de bizuthage

1 Transformation de la forme

$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ où $(A, B) \neq (0, 0)$

à la forme

$ax^2 + by^2 + dx + ey + f = 0$ où $(a, b) \neq (0, 0)$

1.1 Exercice

Soit (Γ) la courbe d'équation $x^2 + xy + y^2 + x + y + \frac{1}{4} = 0$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1. Déterminer la matrice M de la forme quadratique : $x^2 + xy + y^2$.
2. Déterminer une base orthonormale (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) de vecteurs propres de M
3. Déterminer une équation cartésienne de (Γ) dans un repère orthonormé $(O, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$

2 Famille de coniques

2.1 Bac Caracas C84

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormal $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit α un nombre réel. On considère la conique C_α d'équation : $\alpha x^2 + y^2 = 1$

1. Montrer que quel que soit α , la conique C_α contient deux points ne dépendant pas de α
2. Déterminer la nature de C_α suivant les valeurs de α
3. Représenter C_{-1} , C_0 , C_1 et C_2

2.2 Famille paramétrée de coniques

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormal $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit λ un nombre réel. On considère la conique C_λ d'équation :

$$y^2 + \lambda x^2 + (\lambda + 1)x - \frac{\lambda}{4} = 0.$$

Discuter selon les valeurs de λ de la nature de C_λ . Donner le cas échéant les coordonnées de son centre de symétrie et les équations de ses asymptotes.

3 Coniques et complexes

3.1 Parabole et Complexes : Exercice Bac C Reims 1983

Soit le plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1°) Déterminer la nature et les éléments géométriques de l'application T de P dans P qui, à chaque point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = -i\bar{z} + 2 + 2i$.

2°) Soit H le milieu du segment $[MM']$. Exprimer l'affixe de H en fonction de z et de \bar{z} . En déduire, toujours en fonction de z et de \bar{z} , la distance de M à H .

3°) Préciser la nature et les éléments caractéristiques des points M du plan P dont l'affixe z vérifie l'équation :

$$|z + 1 + i| = \frac{1}{2} |z + i\bar{z} - 2 - 2i|.$$

3.2 Hyperbole - Bac Lyon E77

Démontrer que $\Gamma = \{M(z) / \frac{z-i}{\bar{z}+4+i} \in i\mathbb{R}\}$ est inclus dans une conique que l'on tracera et dont on donnera tous les éléments caractéristiques.

3.3 Alignement de points

Soit le plan complexe P muni du repère orthonormal $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$. unité : 3 cm)

1. Soit (H) l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant :
 $3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$
Montrer que (H) est une hyperbole dont on déterminera le centre, les sommets et une asymptote.
2. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que les points A , M et M' d'affixe 1 , z et z^4 soient alignés. (On pourra poser $Z = x + iy$ et exprimer le complexe $1 + Z + Z^2 + Z^3$ en fonction de x et y).
Construire l'ensemble Γ

3.3.1 Corrigé

1. Nature et éléments caractéristiques de la courbe (H)

$$\begin{aligned} 3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0 &\iff 3x^2 + 2x - y^2 + 1 = 0 \\ &\iff 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) - y^2 + 1 = 0 \iff 3\left(\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right) - y^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - y^2 + \frac{2}{3} = 0 &\Leftrightarrow 3X^2 - Y^2 = \frac{-2}{3} \text{ en posant } X = x + \frac{1}{3} \\ \text{et } Y = y & \\ \Leftrightarrow \frac{X^2}{\frac{-2}{9}} + \frac{Y^2}{\frac{-2}{3}} = 1 & \end{aligned}$$

On est en présence d'une équation de la forme $-\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \sqrt{\frac{2}{9}}$ et $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$. En conclusion : (H) : $\frac{X^2}{\frac{-2}{9}} + \frac{Y^2}{\frac{-2}{3}} = 1$ dans le re-

père orthonormé $R' = (\Omega; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\Omega(\frac{-1}{3}; 0)$ dans le repère R est une hyperbole

- de centre Ω
- d'axe transverse focal $D((\Omega; \vec{e}_2))$, d'axe non transverse $D((\Omega; \vec{e}_1))$
- de sommets $B(0; \sqrt{\frac{2}{3}})$ et $B'(0; -\sqrt{\frac{2}{3}})$ dans le repère R'
- d'asymptotes les droites $D_1 : Y = \frac{-\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{2}{9}}}X$ et $D_2 : Y = -\frac{-\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{2}{9}}}X$
c'est-à-dire $D_1 : Y = \sqrt{3}X$ et $D_2 : Y = -\sqrt{3}X$ dans le repère R'
- de foyers $F(0; c)$ et $F'(0; -c)$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
- d'excentricité $e = \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{3} > 1$

2. en posant $z = x + iy$

$$\begin{aligned} Z &= 1 + z + z^2 + z^3 = 1 + (x + iy) + (x + iy)^2 + (x + iy)^3 \\ &= 1 + x + iy + x^2 + 2xiy + i^2y^2 + x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + i^3y^3 \\ &= 1 + x + x^2 - y^2 + x^3 - 3xy^2 + i(y + 2xy + 3x^2y - y^3) \text{ donc} \\ \operatorname{Re}(Z) &= 1 + x + x^2 - y^2 + x^3 - 3xy^2 \\ \operatorname{Im}(Z) &= y + 2xy + 3x^2y - y^3 = y(1 + 2x + 3x^2 - y^2) \end{aligned}$$

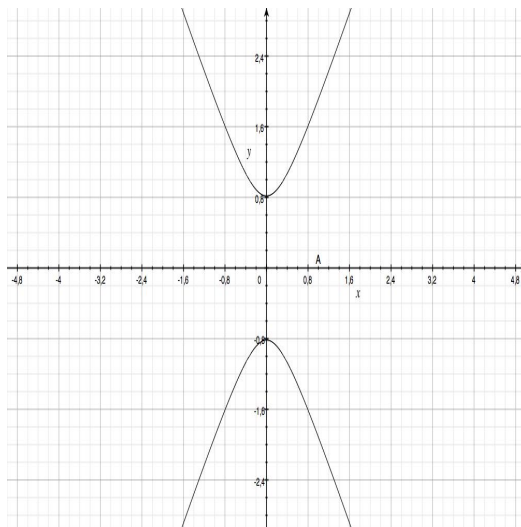
3. (a) ou bien $z \neq 1$

$$\begin{aligned} A, M \text{ et } M' \text{ soient alignés} &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AM'} \\ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) &= k\pi \\ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \operatorname{arg}\left(\frac{z^4 - 1}{z - 1}\right) &= k\pi \\ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \operatorname{arg}\left(\frac{(z - 1)(1 + z + z^2 + z^3)}{z - 1}\right) &= k\pi \\ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} 1 + z + z^2 + z^3 &\in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \operatorname{Im}(Z) = 0 & \\ \Leftrightarrow y(1 + 2x + 3x^2 - y^2) = 0 &\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } 1 + 2x + 3x^2 - y^2 = 0 \\ \Leftrightarrow M \in (H) \cup D(O; \vec{e}_1) &\text{ privée du point } A(1; 0) \text{ car } z \neq 1 \end{aligned}$$

(b) ou bien $z = 1$

Alors A, M et M' sont confondus car $z = 1$ et $z^4 = 1$ donc on peut considérer que ces points sont alignés.

(c) En conclusion, que $z = 1$ ou $z \neq 1$ on a $\Gamma = D(O; \vec{e}_1) \cup (H)$



3.4 Alignement de points

Soit le plan complexe P muni du repère orthonormal $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que les points d'affixe z, z^2 et z^5 soient alignés.
2. Montrer que E est la réunion d'une droite (D) et d'une conique Γ dont on déterminera la nature et les éléments caractéristiques : centre, axe, sommets, foyers et excentricité

3.5 Etude de la fonction f définie par $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On appelle F la fonction de P dans P qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$, associe le point M' d'affixe $z' = f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

1. On pose $z = x + iy$ et $z' = f(z)$. Exprimer en fonction de x et de y la partie réelle et la partie imaginaire de z' .
2. Déterminer l'ensemble E des points M tels que M' appartienne à l'axe des réels.
3. On suppose que M décrit le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer un support de la trajectoire du point M' .
4. Déterminer l'ensemble des points M invariants par F .
5. Soit M_1 d'affixe $\frac{1}{z}$. Connaissant M d'affixe z , construire M_1 puis M'
6. Quelle est l'image par F de M_1 ?
7. Déterminer Γ_1 l'ensemble des points $M'(z')$ tels que $|z|$ est égale à la constante ρ où $\rho \geq 1$. On notera $a = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})$ et $b = \frac{1}{2}(\rho - \frac{1}{\rho})$
Les cercles de centre O et de rayons respectifs $\frac{a+b}{2}$ et $\frac{a-b}{2}$ s'appellent

les cercles de CHASLES de l'ellipse et permettent de la construire point par point.

8. Déterminer Γ_1 pour $\rho = 1$; pour $\rho > 1$. Construire Γ_1 pour $\rho = 3$
9. Déterminer Γ_2 l'ensemble des points $M'(z')$ tels que $\arg(z)$ est égale à la constante Θ où $\Theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Construire Γ_2 pour $\Theta = \frac{\pi}{4}$

3.6 Corrigé

On appelle F la fonction de P dans P qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$, associe le point M' d'affixe $z' = f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

1. On pose $z = x + iy$ et $z' = f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{1}{2}(x + iy + \frac{1}{x + iy}) = \frac{1}{2}(x + iy + \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)}) = \frac{1}{2}(x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}) = \frac{1}{2}(\frac{(x + iy)(x^2 + y^2) + x - iy}{x^2 + y^2}) = \frac{x(x^2 + y^2 + 1) + iy(x^2 + y^2 - 1)}{2(x^2 + y^2)}$.

On en déduit que $x' = \frac{x(x^2 + y^2 + 1)}{2(x^2 + y^2)}$ et $y' = \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{2(x^2 + y^2)}$

2. $M \in E \Leftrightarrow M'$ appartient à l'axe des réels $\Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{2(x^2 + y^2)} = 0$
 $\Leftrightarrow y(x^2 + y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $x^2 + y^2 - 1 = 0$
3. On suppose que M décrit le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer un support de la trajectoire du point M' .
4. Déterminer l'ensemble des points M invariants par F .
5. Soit M_1 d'affixe $\frac{1}{z}$. Connaissant M d'affixe z , construire M_1 puis M'
6. Quelle est l'image par F de M_1 ?
7. Déterminer Γ_1 l'ensemble des points $M'(z')$ tels que $|z|$ est égale à la constante ρ où $\rho \geq 1$. On notera $a = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})$ et $b = \frac{1}{2}(\rho - \frac{1}{\rho})$
Les cercles de centre O et de rayons respectifs $\frac{a+b}{2}$ et $\frac{a-b}{2}$ s'appellent les cercles de CHASLES de l'ellipse et permettent de la construire point par point.
8. Déterminer Γ_1 pour $\rho = 1$; pour $\rho > 1$. Construire Γ_1 pour $\rho = 3$
9. Déterminer Γ_2 l'ensemble des points $M'(z')$ tels que $arg(z)$ est égale à la constante Θ où $\Theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Construire Γ_2 pour $\Theta = \frac{\pi}{4}$

4 Coniques et Arithmétique

4.1 Points à coordonnées entières naturelles d'une conique Bac Maroc C81

Résoudre dans \mathbb{N}^2 l'équation suivante : $x^2 - 9y^2 = -35$

5 Exercices divers

5.1 Bac Martinique C 91

Soit (D) une droite du plan et F un point dont la distance à (D) est égale à 3, l'unité étant le centimètre.

Soit (Δ) la droite passant par F et orthogonale à (D) . On considère Θ un réel tel que $0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}$

1. Soit Γ_Θ l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = \cos(\theta)$; H désignant le projeté orthogonal de M sur la droite (D) . Donner suivant les valeurs de Θ la nature de Γ_Θ
2. Tracer Γ_0
3. (a) Soit $\Theta = \frac{\pi}{3}$. déterminer les sommets A et A' de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ situés sur (Δ) , le centre O et le deuxième foyer F' de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$
- (b) Déterminer une équation cartésienne de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ dans le repère orthonormal $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$ où O est le centre de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ et \vec{u} est un vecteur unitaire de la droite (Δ) tracer alors $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$

5.2 Drôle de courbe

Déterminer Γ l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$ vérifiant l'équation cartésienne suivante :
 $4x|x| + y^2 - 16x - 20 = 0$

5.3 Bac Gabon C 77

Construire dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormal l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant l'équation cartésienne :
 $4y^2 = |9x^2 - 36x|$

5.4 Barycentre et conique

Dans le plan P muni du repère orthonormé $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$ on définit les points $A(1; 0)$, $B(\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$, $C(\frac{3}{2}; \frac{-1}{2})$ et la droite (D) d'équation $x = 1$

1. Déterminer les coordonnées du point G tel que $\vec{CG} = \vec{AB}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABGC$?
2. On note Γ l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan vérifiant :
 $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x - 1)^2$
 - (a) Montrer que B et C appartiennent à Γ
 - (b) Montrer que Γ est l'ensemble des points M vérifiant :
 $MG = \sqrt{2}d(M, (D))$ où $d(M, (D))$ désigne la distance du point M à la droite (D)
 - (c) En déduire la nature de Γ et préciser ses éléments caractéristiques. Représenter ensuite Γ dans le repère orthonormé $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$

5.5 Ellipse - Bac S Antilles Guyane 94

Dans le plan P muni du repère orthonormé $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm , on considère l'ensemble E des points M d'affixe z tels que :

$$|z - 1 - i| = \frac{1}{4}|z + i\bar{z} - 8(1 + i)|$$

1. Soit p l'application du plan dans lui-même, qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1}{2}|z - i\bar{z} + 8(1 + i)|$$

On pourra poser $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.

- (a) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $p(M) = M$
 - (b) Montrer que, pour tout point M , les coordonnées du point M' vérifient l'équation : $x' + y' - 8 = 0$. On appellera (D) la droite décrite par les points M' .
 - (c) Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal à la droite (D) . caractériser géométriquement l'application p .
2. On se propose de déterminer l'ensemble défini au début de l'exercice.
 - (a) Montrer que $z - z' = \frac{1}{2}|z + i\bar{z} - 8(1 + i)|$
 - (b) en déduire que l'ensemble e est une ellipse de foyer F d'affixe $1 + i$, de directrice (D) et d'excentricité $\frac{1}{2}$. Préciser l'axe focal.
 - (c) Vérifier que les points A et A' d'affixes respectives $2 + 2i$ et $-2 - 2i$ sont deux sommets de E .
 3. Allure de l'ensemble E
 - (a) Construire dans le repère $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$ la droite (D) , l'axe focal, les points A, A' et F .
 - (b) Déterminer géométriquement les deux autres sommets de l'ellipse.
 - (c) Donner l'allure de E .

5.6 Puissance d'un point et Hyperbole équilatère

On considère une famille de cercles d'équation : $x^2 + y^2 - 2my - 1 = 0$ dans un repère orthonormal de centre O

1. Montrer que cette famille de cercles passe par 2 points fixes A et B dont on déterminera les coordonnées.
2. Etant donné un cercle (C) de cette famille, on considère son diamètre $[MM']$ parallèle à l'axe des abscisses. Déterminer l'équation de l'ensemble des points M et M' et construire cet ensemble de points.
3. Soit (H) une hyperbole équilatère, A et B deux points de (H) symétriques par rapport à O . Montrer que tout cercle passant par A et B recoupe l'hyperbole en deux points diamétralement opposés.