

Exercices sur les Coniques

Christian CYRILLE

5 novembre 2008

"Racontez l'odyssée d'une jeune conique en mal d'excentricité qui, échappée de ses foyers, y est ramenée par une amie de la directrice grâce à un discours tantôt hyperbolique, tantôt elliptique, et une parabole bien choisie."

Sujet de bizuthage

1 Transformation de la forme

$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ où $(A, B) \neq (0, 0)$

à la forme

$ax^2 + by^2 + dx + ey + f = 0$ où $(a, b) \neq (0, 0)$

1.1 Exercice

Soit (Γ) la courbe d'équation $x^2 + xy + y^2 + x + y + \frac{1}{4} = 0$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1. Déterminer la matrice M de la forme quadratique : $x^2 + xy + y^2$.
2. Déterminer une base orthonormale (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) de vecteurs propres de M
3. Déterminer une équation cartésienne de (Γ) dans un repère orthonormé $(O, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$

2 Famille de coniques

2.1 Bac Caracas C84

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormal $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit α un nombre réel. On considère la conique C_α d'équation : $\alpha x^2 + y^2 = 1$

1. Montrer que quel que soit α , la conique C_α contient deux points ne dépendant pas de α
2. Déterminer la nature de C_α suivant les valeurs de α
3. Représenter C_{-1}, C_0, C_1 et C_2

2.2 Famille paramétrée de coniques

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormal $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit λ un nombre réel. On considère la conique C_λ d'équation :

$$y^2 + \lambda x^2 + (\lambda + 1)x - \frac{\lambda}{4} = 0.$$

Discuter selon les valeurs de λ de la nature de C_λ . Donner le cas échéant les coordonnées de son centre de symétrie et les équations de ses asymptotes.

3 Coniques et complexes

3.1 Parabole et Complexes : Exercice Bac C Reims 1983

Soit le plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1°) Déterminer la nature et les éléments géométriques de l'application T de P dans P qui, à chaque point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = -i\bar{z} + 2 + 2i$.

2°) Soit H le milieu du segment $[MM']$. Exprimer l'affixe de H en fonction de z et de \bar{z} . En déduire, toujours en fonction de z et de \bar{z} , la distance de M à H .

3°) Préciser la nature et les éléments caractéristiques des points M du plan P dont l'affixe z vérifie l'équation :

$$|z + 1 + i| = \frac{1}{2} |z + i\bar{z} - 2 - 2i|.$$

3.2 Hyperbole - Bac Lyon E77

Démontrer que $\Gamma = \{M(z) / \frac{z-i}{\bar{z}+4+i} \in i\mathbb{R}\}$ est inclus dans une conique que l'on tracera et dont on donnera tous les éléments caractéristiques.

3.3 Alignement de points

Soit le plan complexe P muni du repère orthonormal $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$. unité : 3 cm)

1. Soit (H) l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant :
 $3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$
Montrer que (H) est une hyperbole dont on déterminera le centre, les sommets et une asymptote.
2. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que les points A , M et M' d'affixe 1 , z et z^4 soient alignés. (On pourra poser $Z = x + iy$ et exprimer le complexe $1 + Z + Z^2 + Z^3$ en fonction de x et y).
Construire l'ensemble E

3.4 Alignement de points

Soit le plan complexe P muni du repère orthonormal $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que les points d'affixe z , z^2 et z^5 soient alignés.

2. Montrer que E est la réunion d'une droite (D) et d'une conique Γ dont on déterminera la nature et les éléments caractéristiques : centre, axe, sommets, foyers et excentricité

3.5 Etude de la fonction f définie par $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On appelle F la fonction de P dans P qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$, associe le point M' d'affixe $z' = f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

1. On pose $z = x + iy$ et $z' = f(z)$. Exprimer en fonction de x et de y la partie réelle et la partie imaginaire de z' .
2. Déterminer l'ensemble E des points M tels que M' appartienne à l'axe des réels.
3. On suppose que M décrit le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer un support de la trajectoire du point M' .
4. Déterminer l'ensemble des points M invariants par F .
5. Soit M_1 d'affixe $\frac{1}{z}$. Connaissant M d'affixe z , construire M_1 puis M'
6. Quelle est l'image par F de M_1 ?
7. Déterminer Γ_1 l'ensemble des points $M'(z')$ tels que $|z|$ est égale à la constante ρ où $\rho \geq 1$. On notera $a = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})$ et $b = \frac{1}{2}(\rho - \frac{1}{\rho})$
Les cercles de centre O et de rayons respectifs $\frac{a+b}{2}$ et $\frac{a-b}{2}$ s'appellent les cercles de CHASLES de l'ellipse et permettent de la construire point par point.
8. Déterminer Γ_1 pour $\rho = 1$; pour $\rho > 1$. Construire Γ_1 pour $\rho = 3$
9. Déterminer Γ_2 l'ensemble des points $M'(z')$ tels que $arg(z)$ est égale à la constante Θ où $\Theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Construire Γ_2 pour $\Theta = \frac{\pi}{4}$

3.6 Corrigé

On appelle F la fonction de P dans P qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$, associe le point M' d'affixe $z' = f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

$$1. \text{ On pose } z = x + iy \text{ et } z' = f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{1}{2}(x + iy + \frac{1}{x + iy})$$

$$= \frac{1}{2}(x + iy + \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)}) = \frac{1}{2}(x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}) = \frac{1}{2}(\frac{(x + iy)(x^2 + y^2) + x - iy}{x^2 + y^2}) =$$

$$\frac{x(x^2 + y^2 + 1) + iy(x^2 + y^2 - 1)}{2(x^2 + y^2)}.$$

$$\text{On en déduit que } x' = \frac{x(x^2 + y^2 + 1)}{2(x^2 + y^2)} \text{ et } y' = \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{2(x^2 + y^2)}$$

$$2. M \in E \Leftrightarrow M' \text{ appartient à l'axe des réels} \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{2(x^2 + y^2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow y(x^2 + y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 - 1 = 0$$

par conséquent $E = D(O; \vec{u}) \cup C(O; 1) - \{0\}$ car $z \neq 0$

3. M décrit $C(O; 2)$ donc $z = 2e^{i\theta} = 2(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $\theta \in [0; 2\pi]$. par conséquent $x = 2\cos(\theta)$ et $y = 2\sin(\theta)$ donc

$$x' = \frac{2\cos(\theta)(4\cos^2(\theta) + 4\sin^2(\theta) + 1)}{2(4\cos^2(\theta) + 4\sin^2(\theta))} = \frac{5}{4}\cos(\theta)$$

$$y' = \frac{2\sin(\theta)(4\cos^2(\theta) + 4\sin^2(\theta) - 1)}{2(4\cos^2(\theta) + 4\sin^2(\theta))} = \frac{3}{4}\sin(\theta).$$

$$\text{On en déduit que } x'^2 = \frac{25}{4}\cos^2(\theta) \text{ et } y'^2 = \frac{9}{4}\sin^2(\theta) \text{ donc } \frac{x'^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y'^2}{\frac{9}{4}} = 1.$$

Un support de la trajectoire du point M' est donc l'ellipse de centre O , de sommets de coordonnées $(a; 0); (-a; 0); (0; b)$ et $(0; -b)$ où $a = \frac{5}{2}$ et

$b = \frac{3}{2}$ donc de grand axe $D(O; \vec{u})$ de petit axe $D(O; \vec{v})$ car $a > b$

$$4. M(z) \text{ invariant par } F \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = z \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = 2z \Leftrightarrow \frac{1}{z} = z$$

$$\Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = -1$$

$$\text{par conséquent } Inv(F) = \{A(1; 0); B(-1; 0)\}$$

5. Comme $z \neq 0$ donc $z = re^{i\theta}$ donc M_1 d'affixe $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ donc à partir

de $M(r, \theta)$ on peut construire $M_1(\frac{1}{r}, -\theta)$ puis M' le milieu de $[MM_1]$ car

$$z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$

6. Comme $z' = f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ alors l'image par F de $M_1(\frac{1}{z})$ est $M'(z')$

7. Comme $M(z)$ et $M_1(\frac{1}{z})$ ont même image alors si l'on pose $M(\rho e^{i\theta})$ comme

$M_1(\frac{1}{\rho}e^{-i\theta})$ il suffit de travailler avec $\rho \geq 1$.

$$M'(z') \in \Gamma_1 \Leftrightarrow z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \text{ avec } |z| = \rho \text{ où } \rho \geq 1.$$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = \frac{1}{2}(\rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) + \frac{1}{\rho}(\cos(\theta) - i\sin(\theta)))$$

$$= \frac{1}{2}(\cos(\theta))\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{2}(\sin(\theta))\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)$$

$$\text{En notant } a = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \text{ et } b = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)$$

on obtient $M'(z') \in \Gamma_1 \Leftrightarrow x' = a \cos(\theta)$ et $y' = b \sin(\theta)$

- Si $\rho = 1$ alors $a = 1$ et $b = 0$ donc $M'(z') \in \Gamma_1 \Leftrightarrow x' = \cos(\theta)$ et $y' = 0$
donc Γ_1 est le segment $[AB]$ où $A(1; 0)$ et $B(-1; 0)$

- Si $\rho > 1$ alors $a > 0$ et $b > 0$ donc $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$
donc Γ_1 est l'ellipse de centre O , de sommets de coordonnées $(a; 0); (-a; 0); (0; b)$ et $(0; -b)$ donc de grand axe $D(O; \vec{u})$ de petit axe $D(O; \vec{v})$ car $a > b$

Par exemple, pour $\rho = 3$ alors $a = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$ et $b = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$

8. $M'(z') \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \arg(z) = \Theta$ où $\Theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$

$$\Leftrightarrow x' = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos(\theta) \text{ et } y' = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \sin(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x'}{\cos(\theta)} = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \text{ et } \frac{y'}{\sin(\theta)} = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x'^2}{\cos^2(\theta)} - \frac{y'^2}{\sin^2(\theta)} = 1$$

Donc Γ_2 est une hyperbole de centre O , d'axe transverse $D(O; \vec{u})$ et d'axe non transverse $D(O; \vec{v})$

Pour $\Theta = \frac{\pi}{4}$ on a : $\cos^2(\theta) = \sin^2(\theta)$ alors cette hyperbole est équilatère.

4 Coniques et Arithmétique

4.1 Points à coordonnées entières naturelles d'une conique Bac Maroc C81

Résoudre dans \mathbb{N}^2 l'équation suivante : $x^2 - 9y^2 = -35$

4.2 Corrigé

$$x^2 - 9y^2 = -35 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{\frac{35}{9}} = 1$$

On reconnaît donc l'équation d'une hyperbole. Donc le problème consiste à trouver les points de cette hyperbole dont les coordonnées sont des entiers naturels.

$$x^2 - 9y^2 = -35 \Leftrightarrow (x - 3y)(x + 3y) = -35 \Leftrightarrow (3y - x)(3y + x) = 35$$

Or les seuls diviseurs de 35 sont 1, 5, 7, 35.

$$\text{Par conséquent } (3y - x)(3y + x) = 35 \Leftrightarrow 3y - x = 1 \text{ et } 3y + x = 35$$

$$\text{ou } 3y - x = 5 \text{ et } 3y + x = 7$$

$$\text{ou } 3y - x = 7 \text{ et } 3y + x = 5$$

$$\text{ou } 3y - x = 35 \text{ et } 3y + x = 1 \Leftrightarrow y = 6 \text{ et } x = 17$$

$$\text{ou } y = 2 \text{ et } x = 1$$

$$\text{ou } y = 2 \text{ et } x = -1 \text{ (à rejeter)}$$

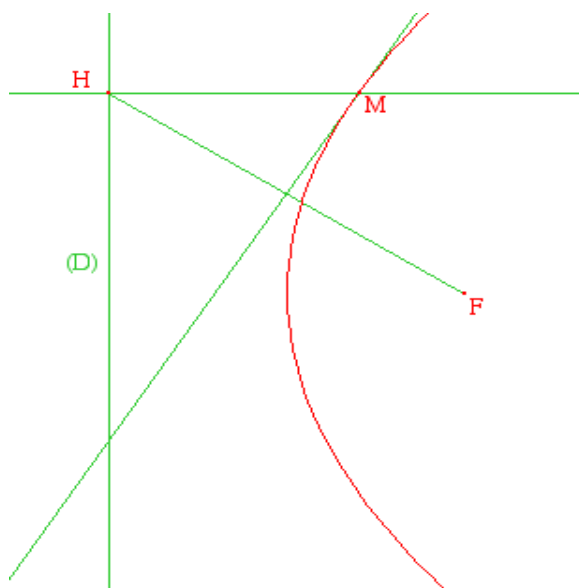
$$\text{ou } y = 6 \text{ et } x = -17 \text{ (à rejeter)}$$

En conclusion, $x^2 - 9y^2 = -35 \Leftrightarrow (x, y) = (1, 2) \text{ ou } (x, y) = (6, 17)$

5 Exercices divers

5.1 Bac Martinique C 91

1. Comme $0 \leq \Theta < \frac{\pi}{2}$ alors $0 < \cos(\Theta) \leq 1$
 - Ou bien $\Theta = 0$ alors $\frac{MF}{MH} = \cos(\Theta) = 1$ donc Γ_0 est une parabole de foyer F et de directrice associée (D) qu'on peut tracer à la règle et au compas. Ceci se construit assez facilement avec le logiciel Cabri-



Géomètre :

- (a) On crée la directrice (D) puis le foyer $F \notin (D)$
- (b) On prend un point mobile H sur (D)
- (c) On trace la droite perpendiculaire en H à (D)
- (d) Elle va couper la médiatrice de $[HF]$ en un point M tel que $MH = MF$
- (e) En dessinant le lieu de M lorsque H varie, on obtient la parabole de foyer F et de directrice (D) .
- Ou bien $0 < \Theta < \frac{\pi}{2}$ alors $0 < \cos(\Theta) < 1$ donc Γ_Θ est une ellipse de foyer F et de directrice associée (D)
2. (a) Soit $\Theta = \frac{\pi}{3}$ donc $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ est une ellipse de foyer F et de directrice associée (D)
 - On place d'abord le sommet A
 - Soit K le point d'intersection de (D) et de (Δ) . Comme $A \in \Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ alors $\frac{AF}{AK} = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ donc $AF = \frac{1}{2}AK$. Comme l'on sait que dans une ellipse le sommet A est entre le foyer F et K le point

- d'intersection de la directrice (D) et de l'axe focal (Δ) alors l'on peut placer A
- puis on place le centre O
- Comme l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{e} = 2$ transforme F en A donc $\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OF}$ donc $\overrightarrow{OA} = 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF})$ donc $-\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{AF}$ donc $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{AF}$
- on peut placer le premier foyer F
 - On peut alors tracer l'autre sommet A' du grand axe car A' est l'image de A par la symétrie centrale de centre O .
 - On peut alors tracer l'autre foyer F' car F' est l'image de F par la symétrie centrale de centre O .
- (b) $OF = c = 1$ et $a =$ le demi-grand axe $= OA = 2$. Comme $a > b$ le demi-petit axe alors $c^2 = a^2 - b^2$ donc $b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$ donc $b = \sqrt{3}$.
- Une équation cartésienne de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ dans le repère orthonormal $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$ où O est le centre de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ et \vec{u} est un vecteur unitaire de la droite (Δ) est donc : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$
- On peut alors tracer alors $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$

5.2 Drôle de courbe

Déterminer Γ l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$ vérifiant l'équation cartésienne suivante :
 $4x|x| + y^2 - 16x - 20 = 0$

5.3 Bac Gabon C 77

Construire dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormal l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant l'équation cartésienne :
 $4y^2 = |9x^2 - 36x|$

5.4 Barycentre et conique

Dans le plan P muni du repère orthonormé $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$ on définit les points $A(1; 0)$, $B(\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$, $C(\frac{3}{2}; \frac{-1}{2})$ et la droite (D) d'équation $x = 1$

1. Déterminer les coordonnées du point G tel que $\vec{CG} = \vec{AB}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABGC$?
2. On note Γ l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan vérifiant :
 $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x - 1)^2$
 - (a) Montrer que B et C appartiennent à Γ
 - (b) Montrer que Γ est l'ensemble des points M vérifiant :
 $MG = \sqrt{2}d(M, (D))$ où $d(M, (D))$ désigne la distance du point M à la droite (D)
 - (c) En déduire la nature de Γ et préciser ses éléments caractéristiques.
Représenter ensuite Γ dans le repère orthonormé $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$

5.5 Ellipse - Bac S Antilles Guyane 94

Dans le plan P muni du repère orthonormé $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm , on considère l'ensemble E des points M d'affixe z tels que :

$$|z - 1 - i| = \frac{1}{4}|z + i\bar{z} - 8(1 + i)|$$

1. Soit p l'application du plan dans lui-même, qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1}{2}|z - i\bar{z} + 8(1 + i)|$$

On pourra poser $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.

- (a) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $p(M) = M$
 - (b) Montrer que, pour tout point M , les coordonnées du point M' vérifient l'équation : $x' + y' - 8 = 0$. On appellera (D) la droite décrite par les points M' .
 - (c) Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal à la droite (D) . caractériser géométriquement l'application p .
2. On se propose de déterminer l'ensemble défini au début de l'exercice.
 - (a) Montrer que $z - z' = \frac{1}{2}|z + i\bar{z} - 8(1 + i)|$
 - (b) en déduire que l'ensemble e est une ellipse de foyer F d'affixe $1 + i$, de directrice (D) et d'excentricité $\frac{1}{2}$. Préciser l'axe focal.
 - (c) Vérifier que les points A et A' d'affixes respectives $2 + 2i$ et $-2 - 2i$ sont deux sommets de E .
 3. Allure de l'ensemble E
 - (a) Construire dans le repère $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$ la droite (D) , l'axe focal, les points A, A' et F .
 - (b) Déterminer géométriquement les deux autres sommets de l'ellipse.
 - (c) Donner l'allure de E .