EC1 – FEUILLE D'EXERCICES- Professeur : Christian CYRILLE

SERIES NUMERIQUES

Exercice 1

Soit une suite (u_n) et soit la suite associée des sommes partielles (S_n) dont les premiers termes sont 3, 6, 11, 18, 27,...

a) Etudier la suite (u_n)

b) En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

c) Que peut-on dire de la série de terme général u_n

Exercice 2 - La série géométrique $\sum q^n$ où $-1 < q < 1$ et ses séries dérivées de terme généraux nq^n et $n^2 q^n$

1°) Démontrer que la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ est convergente de somme $\frac{1}{1-q}$ puis que $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ est convergente de somme $\frac{q}{1-q}$

2°) Démontrer que si $0 < |q| < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} n q^n = 0$ (distinguer 2 cas : $0 < q < 1$ puis $-1 < q < 0$)

3°) Démontrer que la série géométrique $\sum n q^n$ est convergente de somme $\frac{q}{(1-q)^2}$

4°) Démontrer que la série géométrique $\sum n^2 q^n$ est convergente de somme $\frac{q(1+q)}{(1-q)^3}$

5°)Démontrer que la série géométrique $\sum n(n-1) q^{n-2}$ est convergente de somme $\frac{2}{(1-q)^3}$

Exercice 3 - La série harmonique diverge mais la série harmonique alternée converge

1°) En utilisant la courbe représentative de la fonction inverse sur l'intervalle $[k ; k+1]$ où k est un entier naturel non nul, démontrer que $\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$

2°) En déduire que la série harmonique de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente

3°) On appelle série harmonique alternée la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$

Soit la suite des sommes partielles (S_n)

1°) Démontrer que les 2 suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes

2°) Que peut-on alors dire de la suite (S_n) puis de la série harmonique alternée

Exercice 4 - La série exponentielle $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$

Soit a un nombre réel.

1°) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $\int_0^a t\, e^t\, dt = a\, e^a - \int_0^a e^t\, dt$

En déduire que $e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t)\, e^t\, dt$

2°) soit n un entier naturel non nul. On pose $I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t\, dt$.Démontrer que $I_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$

3°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n :

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!} + I_n$$

4°) Démontrer que $0 \leq I_n \leq \frac{a^n}{n!}(e^a - 1)$

5°) On pose $u_n = \frac{a^n}{n!}$. a) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

a) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$ on a :

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$$

b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq u_{n0} (\frac{1}{2})^{n - n_0}$

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ puis montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!} = e^a$

Exercice 5

Démontrer que $\sum\limits_{n = 0}^{\infty} n \frac{a^n}{n!}$ converge vers $a\, e^a$

Exercice 6 - la série de Riemann $\sum\limits_{n = 1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ converge si et seulement si $a > 1$

1°)Etudier les cas $a = 0$; $a = 1$ et $a < 0$

2°) Pour $a > 0$ et $a \neq 1$, en utilisant la courbe représentative de $t \to \frac{1}{t^a}$ sur $[k ; k + 1]$ où k est un entier naturel non nul Démontrer que $\sum\limits_{k = 1}^{n} \frac{1}{(k + 1)^a} \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^a} \leq \sum\limits_{k = 1}^{n} \frac{1}{k^a}$

Etudier alors la convergence de la série de Riemann

Exercice 7

1°) Déterminer les réel a et b tels que $\frac{2}{n^2 - 1} = \frac{a}{n - 1} + \frac{b}{n + 1}$

2°) En déduire que la série $\sum\limits_{n = 2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$ converge

3°) Démontrer que la série $\sum\limits_{n = 1}^{\infty} \frac{1}{n (n + 1) (n + 2)}$ converge

4°) Démontrer que la série $\sum\limits_{n = 1}^{\infty} \ln \left(\frac{(n + 1)^2}{n (n + 2)} \right)$ converge

Exercice 8 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.

1°) Démontrer que les séries suivantes sont convergentes :

a) $\sum \sqrt{u_n v_n}$ (On démontrera d'abord que si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b)$)

b) $\sum \frac{u_n v_n}{a u_n + b v_n}$ où $a > 0$ et $b > 0$ et $a u_n \neq 0$ et $b v_n \neq 0$ pour tout n de N