

EC1 - FEUILLE D'EXERCICES- Professeur : Christian CYRILLE
SUITES 1

Exercice 1 - Progression arithmétique

On suppose que a, b et c sont dans cet ordre 3 termes consécutifs d'une suite arithmétique. Déterminer ces nombres sachant que $a + b + c = 243$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 20133$

Exercice 2 - Progression géométrique

On suppose que a, b et c sont dans cet ordre 3 termes consécutifs d'une suite géométrique. Déterminer ces nombres sachant que $a + b + c = 260$ et $c - a = 160$

Exercice 3

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99$$

$$S_2 = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 100$$

$$S_3 = 2 + 6 + 18 + \dots + 118\,098$$

$$S_4 = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2}{59049}$$

Exercice 4 - Intérêts simples et Intérêts composés

L'intérêt est le loyer d'un capital prêté ou placé.

On dit d'un prêt ou d'un placement qu'il est à intérêts simples si, chaque année, il rapporte une prime d'un montant fixé qui est en général proportionnelle au montant initialement placé :

- Le capital productif d'intérêts ne varie pas durant la durée du prêt.
- Les intérêts annuels ne varient pas.
- Le capital remboursé est égal au capital prêté.

On dit d'un placement qu'il est à intérêts composés annuels si, chaque année, les intérêts rapportés sont proportionnels au capital de l'année précédente et s'ajoutent au capital. Ainsi les intérêts acquis produisent des intérêts ultérieurement.

- Le capital productif d'intérêts s'augmente à la fin de chaque année de l'intérêt produit pendant celle-ci.
- Les intérêts annuels s'accroissent annuellement de l'intérêt produit par l'intérêt de l'année qui vient de s'écouler.
- Le capital remboursé est égal au capital prêté augmenté de l'intérêt composé..

A - Estéphane place un capital u_0 le 1^{er} janvier 2002 au taux de t %, les intérêts étant simples. u_n désigne le capital acquis après n années de placement.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

2°) Quelle inéquation les nombres t et n doivent-ils vérifier pour que u_n excède le double de u_0 ?

3°) En posant $t = 7$ et en programmant une boucle d'arrêt sur la calculatrice, déterminer le nombre d'années nécessaires pour qu'un capital placé au taux de 7 % à intérêts simples soit doublé. Justifier ce résultat par les calculs.

B - Zosiane place un capital v_0 au 1^{er} janvier 2002 au taux de t %, les intérêts étant composés annuels.

v_n désigne le capital acquis après n années de placement.

1°) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

2°) Quelle inéquation les nombres t et n doivent-ils vérifier pour que v_n excède le double de v_0 ?

3°) En posant $t = 7$ et en programmant une boucle d'arrêt sur la calculatrice, déterminer le nombre d'années nécessaires pour qu'un capital placé au taux de 7 % à intérêts composés soit doublé.

C - Démontrer que pour tout entier naturel n , $(1 + t)^n \geq 1 + nt$. Conclusion ?

Exercice 5 - Suite arithmético-géométrique

Soit la suite u définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$ pour tout entier naturel n

1°) La suite est-elle arithmétique ? géométrique ?

2°) Soit (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n - 1$. Démontrer que (v_n) est géométrique.

3°) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice 6 - La légende du jeu d'échecs par OZANAM (1692)

Un auteur arabe, Al-Sephadi, raconte que le mathématicien Sesa ayant inventé le jeu d'échecs, fut présenté au roi de Perse (actuel Iran). Pour le récompenser, celui-ci promit de lui raconter ce qu'il désirerait. Sesa, très modeste, demanda au roi de faire déposer 1 grain de blé pour la 1^{ère} case du jeu, 2 pour la 2^{de}, 4 pour la 3^{ème}, 8 pour la 4^{ème} et ainsi de suite jusqu'à la dernière case (le jeu d'échecs en renferme 64).

Le prince s'indigna d'une demande qu'il jugeait indigne de sa libéralité et fut bien étonné lorsqu'il apprit qu'il lui serait impossible de la satisfaire. En effet :

1°) Combien de grains de blé devrait-on mettre sur la dernière case ?

2°) Combien de grains de blé en tout le roi s'est-il engagé à donner ?

2°) Sesa voulut alors s'en aller avec tout le blé. Un grain de blé pesant en moyenne 0,05 g et qu'un bateau de l'époque transportant 10 000 tonnes, quelle armada de bateaux fallait-il pour transporter ce blé ?

Exercice 7 - Zénon d'Elée et Diogène le Cynique

Zénon d'Elée est un philosophe grec du 5^{ème} siècle avant Jésus Christ qui prétendait démontrer l'impossibilité du mouvement en utilisant quelques paradoxes célèbres. Etudions le paradoxe de la flèche.

Voici l'argumentation : « Une flèche lancée d'un point A ne peut pas atteindre la cible en B . En effet, il lui faudra auparavant parcourir la moitié de la distance AB puis la moitié de la distance restante ce qui l'amènera aux $\frac{3}{4}$ du trajet. Mais avant d'effectuer le dernier quart, la flèche doit parcourir la moitié de ce dernier quart, etc .. Et ainsi de suite : une infinité de moitiés successives à parcourir »

Que répondre à une telle argumentation ?

Supposons, pour fixer les idées que $AB = 10$ m et que la vitesse de la flèche est de 10 m/s.

1°) Quel est le temps mis par la flèche ?

2°) A chaque étape du raisonnement de Zénon, la flèche doit parcourir la moitié de la distance restante. Notons r_n la distance restante à l'instant n .

a) Montrer que $r_n = 10 / 2^n$

b) Calculer la distance d_n parcourue par la flèche à l'étape n . calculer le temps t_n mis pour parcourir cette distance. Vérifier que $d_n < 10$ et que $t_n < 1$.

Ainsi on peut affirmer qu'à chaque étape du raisonnement de Zénon, la flèche n'a pas atteint le point B et c'est tout !

3°) Déterminer la limite de d_n et la limite de t_n quand n tend vers $+\infty$.

Interpréter alors l'expression « une infinité de moitiés successives à parcourir »

Les paradoxes de Zénon soulèvent des problèmes philosophiques profonds en ce qui concerne la notion d'espace-temps et on ne peut pas y répondre aussi légèrement que Diogène le cynique qui lui se leva de son tonneau et marcha de A vers B .

En fait, le problème philosophique soulevé est celui-ci : « le temps est-il sécable ? »

Un autre paradoxe est celui d'Achille et la tortue : Achille aux pieds ailés donne 100 m d'avance à une tortue et court 10 fois plus vite qu'elle. Mais il n'arrive jamais à la rattraper ayant toujours un écart à rattraper.

Exercice 8

Simplifier le produit des $(1 + \frac{1}{k})$ pour k variant de 1 à n

Exercice 9

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{2n+4}{n+3}$

- 1°) Calculer les 4 premiers termes de cette suite.
- 2°) Démontrer que cette suite est positive
- 3°) Démontrer que cette suite est croissante
- 4°) Démontrer que pour tout entier naturel n, l'on a : $1 < u_n < 2$
- 5°) Conclusion ?

Exercice 10

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$

- 1°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, l'on a : u_n existe et est strictement positive
- 2°) Démontrer que (u_n) est minorée par 1
- 3°) Démontrer que (u_n) est majorée par le nombre d'Or $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
- 4°) Démontrer que (u_n) est croissante
- 5°) En déduire que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice 11

Soit un réel $a > 1$. Soit la fonction numérique f_a définie sur $] -\infty ; a [$ par $f_a(x) = x + \ln(a - x)$

- 1°) Etudier les variations de f_a . (Pour étudier la limite en $-\infty$, on mettra $(a - x)$ en facteur dans l'expression de $f_a(x)$)
- 2°) a) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans l'intervalle $] -\infty ; a [$
Donner la valeur de cette solution.
b) Démontrer que $x \leq f_a(x)$ pour $x \leq a - 1$
- 3°) dessiner la courbe représentative de f_2 dans un repère orthonormé (unité graphique : 10 cm)
- 4°) On rappelle que pour tout $x > 0$ on a $\ln(x) < x$. En déduire que $\ln(a - \ln(a)) < a$
- 5°) Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par $u_1 = \ln(a - \ln(a))$ et pour tout $n \geq 2$ par $u_n = f_a(u_{n-1}) = \ln(a - u_1) + \ln(a - u_2) + \dots + \ln(a - u_{n-1})$
 - a) Dessiner u_1, u_2, u_3, u_4 (on prendra $a=2$ pour ce schéma)
 - b) Démontrer que pour tout $n \geq 2$ on a $u_n \leq a - 1$
 - c) En déduire que la suite (u_n) est croissante
 - d) Démontrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.