LYCEE DE BELLEVUE – CLASSE PREPARATOIRE EC1 – ANNEE SCOLAIRE 2003-2004
MATHEMATIQUES – PROFESSEUR : Christian CYRILLE

DEVOIR MAISON N° 13

Etude des suites (u_n) définies par la relation de récurrence du type $u_n = f(u_{n-1})$ où f est une fonction numérique d'une variable réelle

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de R. On dira que l'intervalle de réels I est stable par f lorsque l'ensemble des images des éléments de I par f , que l'on note f<I> , est inclus dans I.
On dira que le réel a est un point fixe de f lorsque f(a) = a

1°) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$

a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n > 0$

b) Démontrer que (u_n) est strictement croissante.

c) Soit g définie par $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$. g admet-elle un point fixe ?

d) Que peut-on alors dire de la suite (u_n) ?

2°) Soit une suite u_n définie par la connaissance de $u_0 \in I$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n avec $f(I) \subset I$

a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in I$

b) On suppose que $\forall x \in I\ f(x) \leq x$. Justifier que (u_n) est décroissante.

c) Que peut-on dire de (u_n) si on suppose que $\forall x \in I\ f(x) \geq x$.

3°) On suppose que f est croissante sur I

a) Démontrer que si $u_0 \leq u_1$ alors la suite (u_n) est croissante

b) Démontrer que si $u_0 \geq u_1$ alors la suite (u_n) est décroissante

Application : Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$

a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et est ≥ 0

b) Si l'on suppose que (u_n) converge , quelle serait sa limite L ?

Méthode 1

c1) Démontrer par récurrence que (u_n) est majorée par 2

d1) Démontrer que (u_n) est croissante

e1) Conclure

Méthode 2

c2) Démontrer que [0 ; 2] est stable par f

d2) Démontrer que $\forall x \in [0 ; 2]\ f(x) \geq x$

e2) Conclure

Méthode 3

c3) Démontrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$

d3) Démontrer par récurrence que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ 0 \leq |u_n - 2| \leq (\frac{1}{2})^n |u_0 - 2|$

e3) Conclure

4°) On suppose que f est décroissante sur I

a) Démontrer que f o f est croissante sur I

b) Démontrer que si $u_0 \leq u_2$ alors (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante

c) Démontrer que si $u_0 \geq u_2$ alors (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) est croissante

On retiendra que si f est décroissante sur I alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie contraire.

Application :

Soit la suite u_n définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n} \end{cases}$

Soit f définie sur R* par $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$

Méthode 1

a) Démontrer que f est décroissante sur R+*

b) Démontrer que I = [1 ; 3] est stable par f

c) Démontrer par récurrence que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ u_n$ existe et est > 0

d) Si (u_n) convergeait, quelle serait sa limite L ?

e) Démontrer que (u_{2n}) est croissante

f) Démontrer que (u_{2n+1}) est décroissante

g) En déduire que (u_{2n}) converge vers L' et que (u_{2n+1}) converge vers L''

h) Démontrer que L = L'

i) En déduire que (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

Méthode 2

a) Démontrer que f est décroissante sur R+*

b) Déterminer f o f

c) Si (u_n) convergeait, quelle serait sa limite L ?

d) Démontrer que pour tout entier naturel on a $u_n > 0$

e) Démontrer que (u_{2n}) est croissante et majorée par 2

f) Démontrer que (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par 2

g) En déduire que (u_{2n}) converge vers L' et que (u_{2n+1}) converge vers L''

h) Démontrer que L' = (f o f)(L') et que L" = (f o f) (L") puis que L' = L"

i) En déduire que (u_n) converge. Quelle est sa limite ?