

DEVOIR N° 18 - A LA MAISON - POUR LUNDI 22 MARS 2004

"Dédié à Newton, plus célèbre mathématicien et physicien anglais 1643 -1727,
Selon la légende , il aurait compris la notion de gravité en recevant une pomme sur la tête."



Méthode de Newton-Raphson

Soit un intervalle I sur lequel une fonction f est dérivable, f' ne s'annulant jamais et f s'annulant en une valeur c de I . Soit $x_0 \in I$ assez proche de c .

1°) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse x_0

2°) Démontrer que l'abscisse x_1 du point d'intersection de (T) et de l'axe des abscisses

vérifie la relation suivante : $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Cette procédure s'appelle la procédure de

Newton-Raphson.

Exemple 1

a) Faire un dessin pour la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2$ sur $I = [1; 2]$

Prendre $x_0 = 1$. Prendre 10 cm comme unité sur l'axe des abscisses et 5 cm comme unité sur l'axe des ordonnées. Appliquer la procédure graphique de Newton à x_0 afin de placer x_1 graphiquement puis réitérer ce procédé à x_1 pour afin d'obtenir x_2 , etc...

b) Déterminer la valeur de c sur I .

c) Prouver que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construite est définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \end{cases}$$

d) Vers quelle valeur semble converger cette suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exemple 2

1°) Soit la fonction f définie par $f(x) = 1 - x + \frac{1}{\sqrt{x}}$

a) Démontrer que f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur \mathbb{R} .

b) Démontrer que $f(x) = 0$ admet une solution unique c dans $]1; 2[$

c) Démontrer que si $x \in [1; 2]$ alors $1 < |f'(x)|$

d) Démontrer que si $x \in [1; 2]$ alors $|f(x)| \leq 1$

e) Démontrer que f' est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que si $x \in [1; 2]$ alors $|f''(x)| \leq \frac{3}{4}$

3°) Soit la fonction notée newton définie par $newton(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

- a) démontrer que $\text{newton}(x)$ existe bien pour tout $x > 0$
- b) démontrer que newton est dérivable sur $]0 ; +\infty[$
- c) démontrer que pour tout $x > 0$, on a $\text{newton}'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$
- d) Résoudre sur $[1 ; 2]$:
- l'équation suivante $\text{newton}(x) = x$
 - l'inéquation suivante $\text{newton}(x) > x$
 - l'inéquation $\text{newton}(x) < x$
- e) Démontrer que l'intervalle $I = [1 ; c]$ est stable par la fonction newton
- f) Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \text{newton}(u_n) \end{cases}$
- démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} u_n \in I$
 - démontrer que la suite (u_n) est croissante
 - déduire du 1°) c) et 1°) d) que si $x \in [1 ; 2]$ alors $|\text{newton}'(x)| \leq \frac{3}{4}$
 - démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} |u_n - c| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - c|$
 - en déduire que $\forall n \in \mathbb{N} |u_n - c| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ puis que la suite (u_n) converge vers c



Algorithmique

Compléter le programme suivant en Turbo -Pascal réalisant cette méthode de Newton-Raphson afin de déterminer une valeur approchée x_n de c la racine de l'équation $x^3 - 4 = 0$

On entrera au clavier x_0 une approximation de la racine c . Le nombre d'itérations ne dépassera pas 100 et pour éviter des problèmes avec une dérivée nulle, on sortira du programme si à un moment $\text{abs}(f'(x)) < \text{EPSILON}$

```

Program NEWTON_RAPHSON;
Uses WinCRT; const NBMAXITERATIONS = 100 ; EPSILON = 1.0E-8;
var .....
function f ( ..... : ..... ) : ..... ;
begin
    .....
end;
function deriveedef( ..... : ..... ) : .....;
begin
    .....
end;
begin
(* entrée des données *)
.....
(* traitement *)
.....
(* affichage des résultats *)
if sortie = 1 then writeln(' pas de résultat après ', NBMAXITERATIONS)
    else if sortie = 2 then writeln(' la dérivée est nulle')
        else writeln(' après ', I, ' itérations, c vaut à peu près ', .....:10:5);
end.

```