SERIES NUMERIQUES

1°) Définition d'une série

Soit une suite (u_n) définie à partir de l'entier n_0. A cette suite est associée la suite de ses sommes partielles (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=n0}^{n} u_k$

L'association $((u_n).,(S_n))$ s'appelle la série de terme général u_n qu'on note $\sum u_n$

Si $\lim_{n \to +\infty} S_n = S$ alors on dira que la série $\sum u_n$ est convergente . S est alors appelée la somme de la série et on note $\sum_{k=n0}^{\infty} u_k = S$

Si $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ alors on dira que la série $\sum u_n$ est divergente

Remarque : On ne change pas la nature d'une série en éliminant un nombre fini de ses termes.

2°) Exemples

a) Exemple 1

Soit une suite (u_n) et soit la suite associée des sommes partielles (S_n) dont les premiers termes sont 3, 6, 11, 18, 27,…

a) Etudier la suite (u_n)

b) En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

c) Que peut-on dire de la série de terme général u_n

Exemple 2 - La série géométrique $\sum q^n$ et ses "séries dérivées" (Ici $-1 < q < 1$)

1°) Démontrer que la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ est convergente de somme $\frac{1}{1-q}$ puis que $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ est convergente de somme $\frac{q}{1-q}$

2°) Démontrer que si $0 < |q| < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} n\, q^n = 0$ (distinguer 2 cas : $0 < q < 1$ puis $-1 < q < 0$)

3°) Démontrer que la série géométrique $\sum n\, q^n$ est convergente de somme $\frac{q}{(1-q)^2}$

4°) Démontrer que la série géométrique $\sum n^2 q^n$ est convergente de somme $\frac{q\,(1+q)}{(1-q)^3}$

5°)Démontrer que la série géométrique $\sum n(n-1)\, q^{n-2}$ est convergente de somme $\frac{2}{(1-q)^3}$

Exemple 3 - La série harmonique diverge mais la série harmonique alternée converge

1°) En utilisant la courbe représentative de la fonction inverse sur l'intervalle $[k\,;\,k+1]$ où k est un entier naturel non nul, démontrer que $\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k) \geq \frac{1}{k+1}$

2°) En déduire que la série harmonique de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente

3°) On appelle série harmonique alternée la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$

Soit la suite des sommes partielles (S_n). Démontrer que les 2 suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Que peut-on alors dire de la suite (S_n) puis de la série harmonique alternée

Exemple 4 : Une série dite "télescopique " : $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ CV 1

Exemple 5 - La série exponentielle $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$ d'où $\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{a^n}{n!}$ converge vers a e^a

Soit a un nombre réel non nul.

1°) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $\int_0^a t\, e^t\, dt = a\, e^a - \int_0^a e^t\, dt$

En déduire que $e^a = 1 + a + \int_0^a (a - t)\, e^t\, dt$

2°) soit n un entier naturel non nul. On pose $I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t\, dt$

Démontrer que $I_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$

3°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n :

$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!} + I_n$

4°) Démontrer que $0 \le I_n \le \frac{a^n}{n!} (e^a - 1)$

5°) On pose $u_n = \frac{a^n}{n!}$.

a) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

b) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel $n \ge n_0$ on a :

$u_{n+1} \le \frac{1}{2} u_n$

c) En déduire que pour tout entier naturel $n \ge n_0$, $0 \le u_n \le u_{n_0} (\frac{1}{2})^{n - n_0}$

d) En déduire $\lim_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim_{n \to +\infty} I_n$ puis montrer que $\lim_{n \to +\infty} 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!} = e^a$

Exemple 6 - la série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ converge si et seulement si a > 1

a) Etudier les cas a = 0 ; a = 1 ; a < 0

b) Soit a > 0 et a ≠ 1, en utilisant la courbe représentative de $t \to \frac{1}{t^a}$ sur [k ; k + 1] où k est un entier naturel non nul

Démontrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^a} \le \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^a} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$

Etudier alors la convergence de la série de Riemann

3°) Conditions de convergence

a) séries quelconques

Théo 1 - CN - condition nécessaire

Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

c'est-à-dire que si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq 0$ alors la série $\sum u_n$ diverge

dém : $u_n = S_n - S_{n-1}$ donc si $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{n-1} = S$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

La réciproque est fausse : c'est le cas de la série harmonique

Théo 2 - CNS - condition nécessaire et suffisante

la série $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow$ pour tout p de N , $\lim\limits_{n \to +\infty} (S_{n+p} - S_n) = 0$

b) séries à termes positifs

définition

Une série $\sum u_n$ est dite à termes positifs lorsque pour tout n, l'on a $u_n \geq 0$

Dans ce cas, la suite associée des sommes partielles (S_n) est forcément croissante d'où

Théo 3 - CNS

la série $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow$ la suite associée des sommes partielles (S_n) est majorée

la série $\sum u_n$ diverge $\Leftrightarrow$ la suite associée des sommes partielles (S_n) est non majorée c'est-à-dire tend vers $+\infty$

Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs

Théo 4

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries à termes positifs telles qu' à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$

- si $\sum v_n$ CV alors $\sum u_n$ CV

- si $\sum u_n$ DV alors $\sum v_n$ DV

Théo 5

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries à termes positifs telles que $u_n = o(v_n)$

- si $\sum v_n$ CV alors $\sum u_n$ CV

- si $\sum u_n$ DV alors $\sum v_n$ DV

Théo 6

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$

alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Dans le cas où elles sont toutes deux CV, elles n'ont pas forcément la même somme.

4°) Opérations sur les séries

a) somme de 2 séries

La somme des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum u_n + v_n$

Théo 7

Si $\sum u_n$ converge vers S et si $\sum v_n$ converge vers S' alors $\sum u_n + v_n$ converge vers S + S'

La réciproque est fausse : c'est le cas de la série "télescopique" $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ donc $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ CV alors que $\sum \frac{1}{n}$ DV et $\sum \frac{1}{n+1}$ DV

c) multiplication d'une série par un réel

La multiplication de la série $\sum u_n$ par le réel λ est la série $\sum \lambda u_n$

Théo 8

Si $\sum u_n$ converge vers S alors pour tout réel λ, $\sum \lambda u_n$ converge vers λ S,

5°) Séries absolument convergentes

a) définition

$\sum u_n$ est dite absolument convergente (ACV) lorsque la série $\sum |u_n|$ est convergente

b) Théo 9

Si une série est ACV alors elle est CV

La réciproque est fausse : c'est le cas de la série harmonique

6°)Exercices

Exercice

1°) Déterminer les réel a et b tels que $\frac{2}{n^2 - 1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$

2°) En déduire que la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$ converge

3°) Démontrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge

4°) Démontrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$ converge

Exercice Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.

1°) Démontrer que les séries suivantes sont convergentes :

a) $\sum \sqrt{u_n v_n}$ (On démontrera d'abord que si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b)$)

b) $\sum \frac{u_n v_n}{a u_n + b v_n}$ où $a > 0$ et $b > 0$ et $a u_n + b v_n \neq 0$ pour tout n de N