"Dédié à Euler, mathématicien suisse 1707-1783, qui trouva que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$"

La série exponentielle $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$ **et** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{a^n}{n!} = a\, e^a$

Soit a un nombre réel > 0.

1°) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $\displaystyle\int_0^a t\, e^t\, dt = a\, e^a - \int_0^a e^t\, dt$

En déduire que $\displaystyle e^a = 1 + a + \int_0^a (a - t)\, e^t\, dt$

2°) soit n un entier naturel non nul. On pose $\displaystyle I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t\, dt$

Démontrer que $\displaystyle I_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$

3°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n :

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!} + I_n$$

4°) Démontrer que $\displaystyle 0 \le I_n \le \frac{a^n}{n!}(e^a - 1)$

5°) On pose $\displaystyle u_n = \frac{a^n}{n!}$.

a) Calculer $\displaystyle \frac{u_{n+1}}{u_n}$

b) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel $n \ge n_0$ on a :

$$u_{n+1} \le \frac{1}{2} u_n$$

c) En déduire que pour tout entier naturel $n \ge n_0$, $\displaystyle 0 \le u_n \le u_{n_0} \left(\frac{1}{2}\right)^{n - n_0}$

d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ puis montrer que $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!} = e^a$

e) Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{a^n}{n!}$ converge vers $a\, e^a$