Droite et Cercle d'EULER

Christian CYRILLE

22 novembre 2014

"Euler, notre maître à tous"
LAPLACE

Léonard EULER, mathématicien suisse
(Bâle 1707 - St Pétersbourg 1783)

1 Droite d'Euler

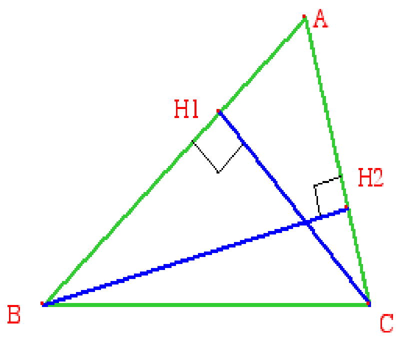
Soit un triangle ABC non équilatéral. On appellera G son centre de gravité, O le centre du cercle circonscrit et H son orthocentre.

1.1 Existence de H

1.1.1

Les hauteurs contenant B et C sont concourantes en un point H

1.1.2 démonstration



Supposons que (CH_1) et (BH_2) ne soient pas sécantes alors de deux choses l'une : ou bien (CH_1) et (BH_2) sont parallèles ce qui n'est pas possible , ou bien (CH_1) et (BH_2) sont parallèles mais alors les droites (AB) et (AC) seraient parallèles car $(AB)\perp(CH_1)$ et $(AC)\perp(BH_2)$

1.1.3 Lemme

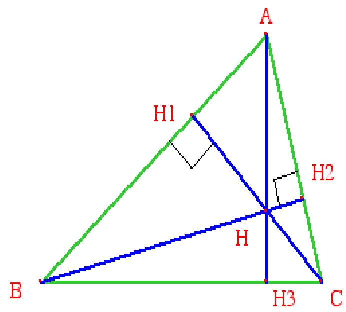
Soit A, B et C trois points du plan P.
$\forall M \in P$ on a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$

1.1.4 démonstration

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}).\overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BB} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = 0$

1.1.5 Concourance des 3 hauteurs

Donc $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$. Comme $(AB)\perp(CH)$ et $(AC)\perp(BH)$ alors $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$ et $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$ donc $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$ donc la droite (AH) est la droite passant par A et $\perp(BC)$ donc c'est la troisième hauteur.
Les 3 hauteurs d'un triangle sont donc concourantes en un point H appelé Orthocentre du triangleABC



1.2 Existence de O, centre du cercle circonscrit

1.2.1 Définition de la médiatrice d'un segment

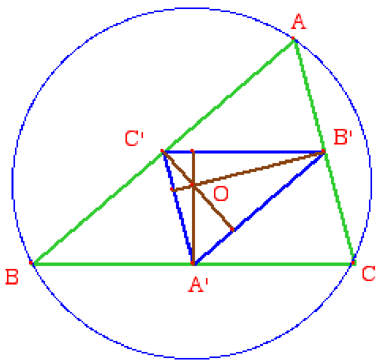
La médiatrice de $[AB]$ est la droite passant par le milieu de $[AB]$ et perpendiculaire à $[AB]$.

1.2.2 Propriété caractéristique d'une médiatrice

La médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants des extrémités A et B c'est-à-dire :
$M \in$ la médiatrice de $[AB] \Leftrightarrow MA = MB$

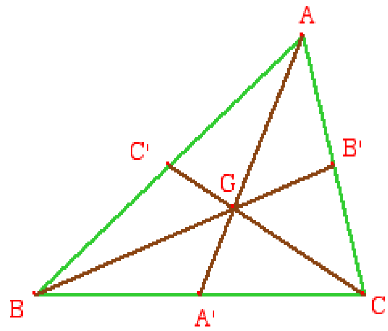
1.2.3 Cercle circonscrit au triangle ABC

Soient A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC], [AC]$ et $[AB]$. Les hauteurs du triangle $A'B'C'$ sont les médiatrices du triangle ABC.
Comme les hauteurs d'un triangle sont concourantes alors les trois médiatrices sont concourantes en un point O qui est alors le centre du cercle circonscrit à ABC.



1.3 Existence du centre de gravité G

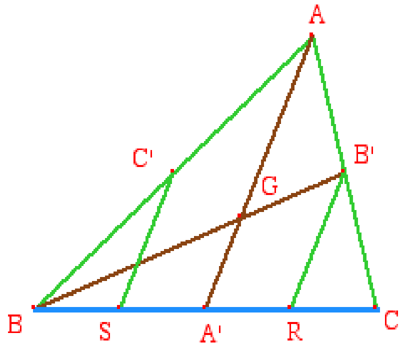
Les trois médianes d'un triangle ABC sont concourantes en un point G situé sur chacune des médianes à $\frac{1}{3}$ de la base et à $\frac{2}{3}$ du sommet.

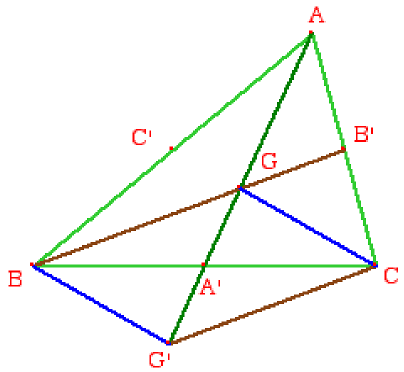


1.3.1 démonstration

Les médianes (AA') et (BB') sont concourantes en un point G.La droite parallèle à (AA') et passant par B' coupe (BC) en R. En appliquant le théorème des milieux au triangle $AA'C$ on obtient que R est le milieu de $[A'C]$.
Donc $A'R = RC = \dfrac{A'C}{2}$
La droite parallèle à (AA') et passant par C' coupe (BC) en S. En appliquant le théorème des milieux au triangle $AA'B$ on obtient que S est le milieu de $[A'B]$.

Donc $BS = SA' = \dfrac{BA'}{2}$
Comme $BA' = A'C$ on a $BS = SA' = A'R = RC$
Projetons maintenant (BR) sur (BB') parallèlement à (AA'). Alors d'après le théorème de THALES, $\dfrac{BG}{BB'} = \dfrac{BA'}{BR} = \dfrac{2BS}{3BS} = \dfrac{2}{3}$ Par un raisonnement analogue, on prouve que $\dfrac{AG}{AA'} = \dfrac{2}{3}$.





De plus, soit G' le symétrique de G par rapport à A'. Alors G devient le milieu de $[AG']$. Comme A' est le milieu de $[BC]$ et aussi le milieu de $[GG']$, alors $BGCG'$ est un parallélogramme donc (CG) est parallèle à $(G'B)$ et par conséquent, à cause du théorème des milieux elle va couper le côté du triangle ABG' en le milieu C' de $[AB]$. La troisième médiane $[AC']$ passe donc par G. CQFD.

1.4 Position géométrique de O,H et G

1.4.1 Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

Dans un plan vectoriel euclidien,
$\forall \overrightarrow{v}\ \forall \overrightarrow{w}$ on a : $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})^2 \leq \|\overrightarrow{v}\|^2\|\overrightarrow{w}\|^2$ c'est-à-dire $|\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}| \leq \|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{w}\|$
L'égalité n'a lieu que dans un seul cas : lorsque les vecteurs $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$sont colinéaires.

1.4.2 démonstration

$\forall\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})^2 \geq 0$ c'est-à-dire que le trinôme d'inconnue λ :
$T(\lambda)$: $\lambda^2\overrightarrow{v}^2 + 2\lambda\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w}^2$ a le signe de $\overrightarrow{v}^2$ $\forall\lambda \in \mathbb{R}$
donc le discriminant réduit $\Delta' \leq 0$ donc $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\|\overrightarrow{w}\|^2 \leq 0$
CQFD.
De plus, comme $\Delta' \leq 0$ alors on a les équivalences logiques suivantes :
$\Delta' = 0 \Leftrightarrow T(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$ les vecteurs $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ sont colinéaires.
CQFD.

1.4.3 Lemme

Si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$, si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 0$ et si $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est libre alors $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

1.4.4 démonstration

Comme la famille $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est libre dans le plan vectoriel alors c'est une base de ce plan vectoriel donc $\exists\lambda_1 \in \mathbb{R}$ $\exists\lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\overrightarrow{u} = \lambda_1\overrightarrow{v} + \lambda_2\overrightarrow{w}$.
Comme $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ alors

$$\begin{cases} (\lambda_1\overrightarrow{v} + \lambda_2\overrightarrow{w}).\overrightarrow{v} = 0 \\ (\lambda_1\overrightarrow{v} + \lambda_2\overrightarrow{w}).\overrightarrow{w} = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \lambda_1\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v} + \lambda_2\overrightarrow{w}.\overrightarrow{v} = 0 \\ \lambda_1\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} + \lambda_2\overrightarrow{w}.\overrightarrow{w} = 0 \end{cases}$$

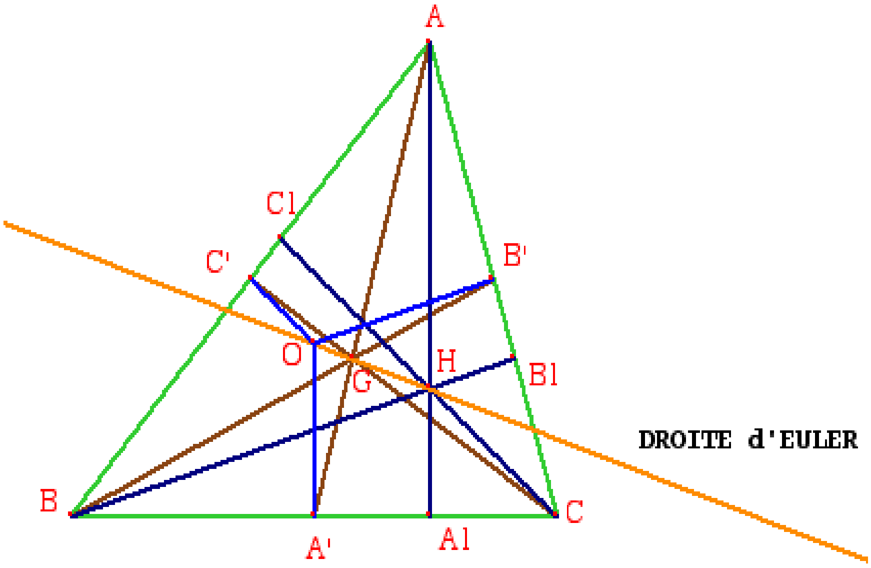
Ce système est de CRAMER et admet une unique solution $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$ car le déterminant de ce système d'inconnues λ_1 et λ_2 est $\|\overrightarrow{v}\|^2\|\overrightarrow{w}\|^2 - (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})^2$ est non nul car d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})^2 \leq \|\overrightarrow{v}\|^2\|\overrightarrow{w}\|^2$l'égalité n'ayant lieu que si la famille $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$est liée ce qui n'est pas le cas ici.

1.4.5 Relation d'EULER

O,H et G vérifient la relation suivante , dite Relation d'EULER :
$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ce qui entraîne que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
Les points O,G et H sont alignés sur une droite appelée la Droite d'EULER.

1.4.6 démonstration

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC})$
$= 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{0} = 3\overrightarrow{OG}$
On a aussi :
$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B}) + (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'C}) = 2\overrightarrow{OA'}) + (\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}) = 2\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{0} = 2\overrightarrow{OA'}$
Donc
$3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{AH}$ On a donc : $(3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}).\overrightarrow{BC} = (2\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{AH}).\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 - 0 = 0$
En effet $\overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{BC} = 0$ car $(OA') \perp (BC)$ puisque c'est la médiatrice de $[BC]$
$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ car $(AH) \perp (BC)$ puisque c'est la hauteur relative à $[BC]$



Par un raisonnement analogue, on démontre que $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{BH}$puis que $(3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}).\overrightarrow{CA} = 0$ D'après le lemme précédent , comme $(3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}).\overrightarrow{BC} = 0$, que $(3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}).\overrightarrow{CA} = 0$ et que la famille $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$ est libre alors $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.CQFD.

2 Cercle d'Euler ou Cercle des 9 points

2.1 Image du cercle circonscrit à ABC par l'homothétie de centre G et de rapport $-\dfrac{1}{2}$

Notons R le rayon du cercle circonscrit à ABC. L'image du cercle circonscrit à ABC par l'homothétie $\mathcal{H}$ de centre G et de rapport $-\dfrac{1}{2}$ est le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$. Ce cercle a pour rayon $\dfrac{R}{2}$ et pour centre $\mathcal{H}(O) = O'$ tel que $\overrightarrow{GO'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GO}$. En fait O' est le milieu de $[OH]$.

2.1.1 démonstration

Notons $\mathcal{H}$ l'homothétie de centre G et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

L'image du cercle Γ circonscrit à ABC par $\mathcal{H}$ est un cercle Γ' de rayon $\dfrac{R}{2}$ et pour centre $\mathcal{H}(O) = O'$ tel que $\overrightarrow{GO'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GO}$.

$\overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{O'G} + \overrightarrow{GO} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GO} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{GO}$

Or $\overrightarrow{O'H} = \overrightarrow{O'G} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OH} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GO} + 3\overrightarrow{OG} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{OG}$

donc $\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{O'H}=\overrightarrow{0}$ donc O' est le milieu de $[OH]$.

$H_1(A)=A'$ car $\overrightarrow{GA'}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.
De même, $\mathcal{H}(B)=B'$ et $\mathcal{H}(C)=C'$.
Or les points A, B et C appartiennent au cercle circonscrit à Γ donc les points A', B' et C' appartiennent au cercle circonscrit à Γ'

2.2 3 autres points du cercle circonscrit à $A'B'C'$

Les projetés respectifs A_1, B_1 et C_1 de H sur les côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ appartiennent aussi au cercle Γ'

2.2.1 démonstration

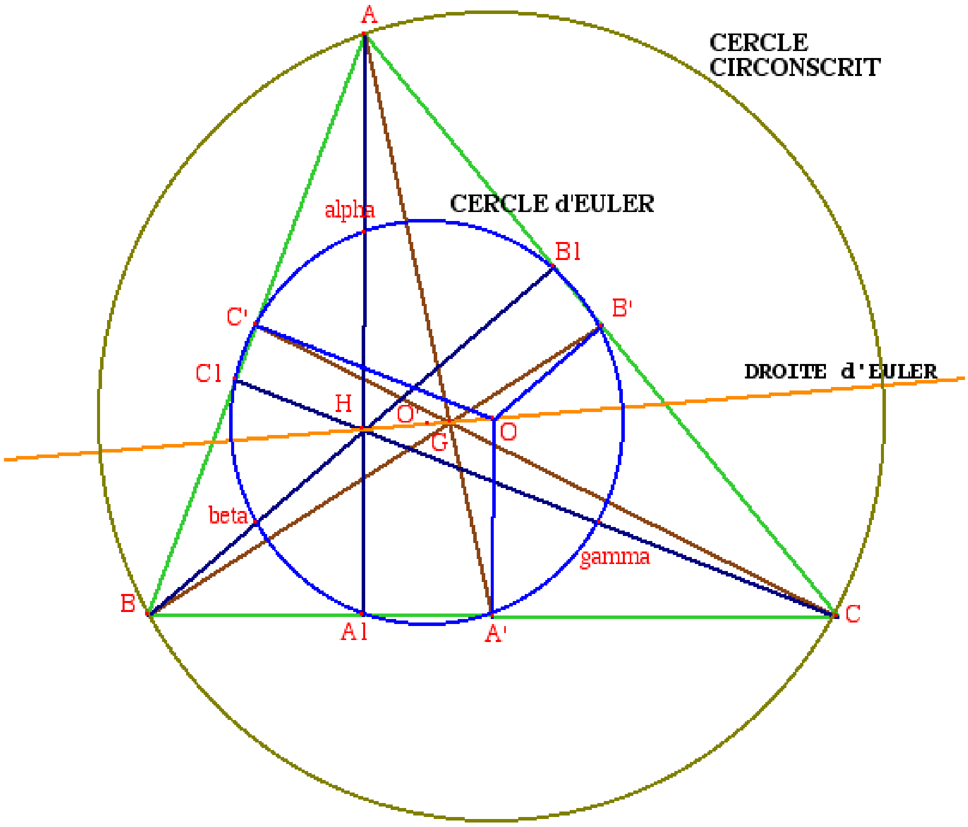
O se projette orthogonalement à $[BC]$ en A'
H se projette orthogonalement à $[BC]$ en A_1
Donc O' milieu de $[OH]$ se projette orthogonalement en le milieu E de $[A'A_1]$
On en déduit que $O' \in$ la médiatrice de $[A'A_1]$
d'où $O'A_1=O'A=\dfrac{R}{2}$ donc $A_1 \in \Gamma'$.
Par un raisonnement analogue en projetant O' orthogonalement sur $[AB]$ on prouve que $C_1 \in \Gamma'$
Par un raisonnement analogue en projetant O' orthogonalement sur $[AC]$ on prouve que $B_1 \in \Gamma'$. CQFD

2.3 De nouveau 3 autres points du cercle Γ'

Les points α, β et γ images des points A, B et C par l'homothétie $\mathcal{H}'$ de centre H et de rayon $\dfrac{1}{2}$appartiennent aussi au cercle Γ'

2.3.1 démonstration

On note α, β et γ images des points A, B et C par l'homothétie $\mathcal{H}'$ de centre H et de rayon $\dfrac{1}{2}$.
$\overrightarrow{O'H}=-\overrightarrow{O'O}$ donc $\overrightarrow{O'H}=-\overrightarrow{O'H}-\overrightarrow{HO}$ d'où $2\overrightarrow{O'H}=-\overrightarrow{HO}$ donc $\overrightarrow{HO'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{HO}$
donc l'homothétie $\mathcal{H}'$ de centre H et de rayon $\dfrac{1}{2}$ transforme O en O', donc transforme le cercle Γ en Γ'.
Or A, B et C appartiennent àΓ donc les images α, β et γ images des points A, B et C par l'homothétie $\mathcal{H}'$ de centre H et de rayon $\dfrac{1}{2}$ appartiennent à Γ'

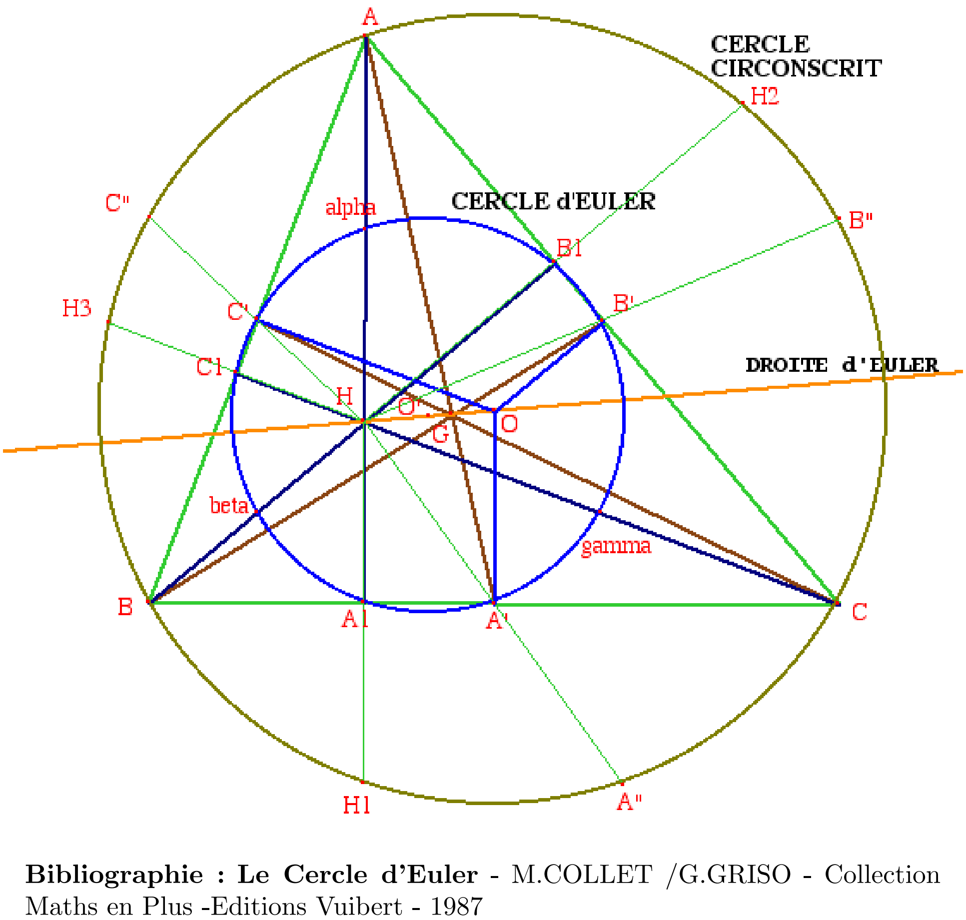

A
CERCLE
CIRCONSCRIT
alpha
CERCLE d'EULER
B1
C'
B'
C1
DROITE d'EULER
H
O'
G
O
beta
gamma
B
A1
A'
C

2.4 Utilisation de l'homothétie réciproque $\mathcal{H}'^{-1}$ de centre H et de rayon 2 transformant Γ' en Γ

1. Les symétriques H_1,H_2 et H_3 de H par rapport aux côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ appartiennent à Γ
2. Les symétriques A",B" et C" de H par rapport à A',B' et C' milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ appartiennent à Γ

2.4.1 démonstration

$\overrightarrow{HH_1} = 2\overrightarrow{HA_1}$ donc $\mathcal{H}'^{-1}$ transforme A_1 en H_1.
$\overrightarrow{HA"} = 2\overrightarrow{HA'}$ donc $\mathcal{H}'^{-1}$ transforme A' en A".
Par un raisonnement analogue, $\mathcal{H}'^{-1}$ transforme B_1 en H_2, C_1 en H_3, B' en B",C' en C" ;
Or $\mathcal{H}'^{-1}$ transforme Γ' en Γ. les points A_1 B_1 C_1 A_1 A_1 A_1 appartenant au cercle d'EULER Γ', il va de soi que les points H_1,H_2, H_3, A",B" et C" appartiennent au cercle circonscrit Γ



Bibliographie : Le Cercle d'Euler - M.COLLET /G.GRISO - Collection Maths en Plus -Editions Vuibert - 1987
Géométrie de l'Espace et du Plan - Yvonne et René SORTAIS - Editions HERMANN - 1988