Le Raisonnement par récurrence

Christian CYRILLE

21 septembre 2017

1 Axiome d'induction compléte

Soit E une partie de $\mathbb{N}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

1. $0 \in E$
2. si $n \in E$ alors $n+1 \in E$

alors $E = \mathbb{N}$.

2 Théorème de récurrence faible

Soit Pr une propriété que peut vérifier un entier naturel k (ce que l'on notera $Pr(k)$) Soit n_0 un entier naturel.

1. Si $Pr(n_0)$ est vraie (c'est-à-dire que la propriété Pr est vraie en n_0)
2. Si pour tout k entier $\geq n_0$, l'implication $Pr(k) \Rightarrow Pr(k+1)$ est vraie (c'est-à-dire que la propriété est héréditaire)

Alors pour tout $n \geq n_0$, $Pr(n)$ est vraie .

2.1 Démonstration

. On fait cette démonstration dans le cas où $n_0 = 0$.
Soit $E = \{n \in \mathbb{N} \ / \ Pr(n) \text{ est vraie } \}$.

1. $0 \in E$ car $Pr(0)$ est vraie.
2. si $n \in E$ alors $n+1 \in E$ puisque $Pr(n) \Rightarrow Pr(n+1)$

donc d'après l'axiome d'induction complète, on a : $E = \mathbb{N}$.

2.2 Attention !

Il y a deux étapes dans ce type de démonstration.

- Dans l'étape 1, il faut vérifier que la propriété est vraie uniquement en n_0
- Dans l'étape 2 , en considérant la table de vérité de l'implication logique

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

  Comme il faut démontrer que l'implication est vraie, on procédera ainsi :
  On supposera que $pr(k)$ est vraie (c'est ce que l'on appelle l'hypothèse de récurrence) et on raisonnera jusqu'à prouver que $pr(k+1)$ est vraie.
  On aura ainsi démontré que l'implication $(Pr(k) \Rightarrow Pr(k+1))$ est vraie

3 Théorème de récurrence double

Soit Pr une propriété que peut vérifier un entier naturel k (ce que l'on notera $Pr(k)$). Soit n_0 un entier naturel.

1. Si $Pr(n_0)$ et $Pr(n_0+1)$ sont vraies
2. Si pour tout k entier $\geq n_0$, l'implication $Pr(k) et\ Pr(k+1)) \Rightarrow Pr(k+2)$ est vraie (c'est-à-dire que la propriété est doublement héréditaire)

Alors pour tout $n \geq n_0$, $Pr(n)$ est vraie .

4 Théorème de récurrence forte

Soit Pr une propriété que peut vérifier un entier naturel k (ce que l'on notera $Pr(k)$). Soit n_0 un entier naturel.

1. Si $Pr(n_0)$
2. Si pour tout k entier $\geq n_0$, l'implication $Pr(n_0)$ et $Pr(n_0+1)$ et $\cdots$ et $Pr(k) \Rightarrow Pr(k+1)$
   est vraie (c'est-à-dire que la propriété est doublement héréditaire)

Alors pour tout $n \geq n_0$, $Pr(n)$ est vraie .

5 Exercices

5.1 Cardinal de $P(E)$

1. Déterminer l'ensemble des parties de E noté $\mathcal{P}(E)$ dans les cas suivants $E_1 = \{a\}$; $E_2 = \{a; b\}$; $E_3 = \{a; b; c\}$
2. Démontrer par récurrence que si E est un ensemble fini ayant n éléments alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de ses parties a 2^n éléments
3. En déduire $\mathcal{P}(\emptyset)$; $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$; $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$; $Card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))))$

5.1.1 corrigé

1. Pour créer l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E,
   - on place d'abord la seule partie à 0 éléments qui est l'ensemble vide $\emptyset$
   - puis les parties à 1 élément qu'on appelle les singletons,
   - les parties à 2 éléments qu'on appelle les paires,
   - celles à 3 éléments ,
   - ...
   - celles à $n-1$ éléments
   - et enfin la seule partie à n éléments, la partie pleine c'est-à-dire l'ensemble E lui-même.

   Par conséquent,
   - si $E_1 = \{a\}$ alors $\mathcal{P}(E_1) = \{\emptyset; \{a\}\}$
   - si $E_2 = \{a; b\}$ alors $E_2 = E_1 \cup \{b\}$ et $\mathcal{P}(E_2) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\}$
   - si $E_3 = \{a; b; c\}$ alors $E_3 = E_2 \cup \{c\}$ et $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; \{a; b; c\}\}$

   On peut donc remarquer que lorsque l'on ajoute un élément rouge à un ensemble E_i , alors l'ensemble des parties du nouvel ensemble $E_i \cup \{x\}$ est formé de toutes les anciennes parties de E_i auxquelles on ajoute de nouvelles parties qui sont en fait formées des anciennes parties auxquelles on ajoute le nouveau élément rouge $\{x\}$.
   Donc il y a autant de nouvelles parties ayant ce nouvel élément rouge x que d'anciennes parties n'ayant pas x.
2. On pose $pr(n)$:" le nombre de parties d'un ensemble ayant n éléments est 2^n"
   (a) Etape 1 : initialisation
   A-t-on $pr(0)$?
   c'est-à-dire a-t-on le nombre de parties d'un ensemble ayant 0 éléments est 2^0 ?

Oui car si $Card(E) = 0$ c'est que $E = \emptyset$ donc $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. $\mathcal{P}(E)$ n'a donc qu'un seul élément.
Par conséquent $pr(0)$ est vraie.

(b) Etape 2 : hérédité
Soit un certain entier $k \geq 0$. A-t-on $pr(k) \Longrightarrow pr(k+1)$?
c'est-à-dire a-t-on le nombre de parties d'un ensemble ayant k éléments est $2^k \Longrightarrow$ que le nombre de parties d'un ensemble ayant $k+1$ éléments est 2^{k+1}
Supposons que l'hypothèse de récurrence suivante " le nombre de parties d'un ensemble ayant k éléments est 2^k " soit vraie.
Soit un ensemble F ayant $k+1$ éléments. Isolons un élément x de F . Par conséquent $F = E \cup \{x\}$ où E a k éléments.
Alors l'ensemble des parties du nouvel ensemble $F = E \cup \{x\}$ est formé de toutes les anciennes parties de E auxquelles on ajoute de nouvelles parties qui sont en fait formées des anciennes parties auxquelles on ajoute le nouveau élément rouge $\{x\}$.
Or d'après l'hypothèse de récurrence, $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^k$ et de plus il y a autant de nouvelles parties ayant ce nouvel élément rouge que d'anciennes parties n'ayant pas $\{x\}$
donc $Card(\mathcal{P}(F)) = 2^k + 2^k = 2(2^k) = 2^{1+k}$ CQFD.

(c) Conclusion pr est initialisé en 0 et pr est héréditaire
donc pour tout entier naturel n, si $Card(E) = n$ alors $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$"

3. - $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
   - $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset; \{\emptyset\}\}$
   - $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \mathcal{P}(\{\emptyset; \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset; \{\emptyset\}; \{\{\emptyset\}\}; \{\emptyset; \{\emptyset\}\}\}$
   - Comme $card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = 4$ alors $Card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))) = 2^4 = 16$

5.2 Inégalité de Bernoulli

♡ ♡ ♡

Soit a un réel > 0.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, l'on a :

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

2. Redémontrer cette inégalité en utilisant la formule du binôme de Newton ci-dessous :
   Si a et b sont des réels alors pour tout entier naturel n

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

5.2.1 corrigé

1. On pose $pr(n)$: "$(1+a)^n \geq 1+na$"
   (a) Etape 1 : initialisation
   A-t-on $pr(0)$? c'est-à-dire a-t-on $(1+a)^0 \geq 1+0a$? c'est-à-dire a-t-on $1 \geq 1$? Oui.
   Par conséquent $pr(0)$ est vraie.
   (b) Etape 2 : hérédité
   Soit un certain entier $k \geq 0$. A-t-on $pr(k) \Longrightarrow pr(k+1)$?
   c'est-à-dire a-t-on $(1+a)^k \geq 1+ka \Longrightarrow (1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$
   Supposons donc que $(1+a)^k \geq 1+ka$. Or $(1+a)^{k+1} = (1+a)^k(1+a)$.
   Comme $(1+a)^k \geq (1+ka)$ comme $(1+a) > 0$ car $a > 0$ donc $(1+a)^k(1+a) \geq (1+ka)(1+a)$
   d'où $(1+a)^{k+1} \geq 1+ka+a+ka^2$ Mais $ka^2 \geq 0$ puisque $k \geq 0$ et $a > 0$
   donc $1+ka+a+ka^2 \geq 1+a+ka$.
   d'où $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$
   (c) Conclusion pr est initialisé en 0 et pr est héréditaire donc pr est vraie pour tout entier naturel n
2. D'après la formule du binôme de Newton,
   $(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} a^k = \binom{n}{0} 1^n a^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} a^1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} a^k = 1 + na + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} a^k$
   car $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$.
   Or $(1+a)^n = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} a^k = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^k \geq 0$ donc $\boxed{(1+a)^n \geq 1+na}$

5.3 Quelques sommes remarquables

Démontrer par récurrence que :

1. $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = S_1^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
4. $\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$
5. $\sum_{k=1}^{n} k(k!) = 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$
6. Soit une suite $(u_n)_{n \in N^*}$ telle que :
   $\forall n \geq 1 \quad u_n > 0$ et $\sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$
   Démontrer avec une récurrence forte que $\forall n \geq 1 \quad u_n = n$

5.3.1 corrigé

1. Notons $pr(n)$: "$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$"
   (a) **Etape 1 : Initialisation**
   A-t-on $pr(1)$?
   c'est-à-dire a-t-on $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$? Oui car $\frac{1(1+1)}{2} = 1$
   (b) **Etape 2 : Hérédité**
   Supposons que pour un certain entier $n \geq 1$ l'on ait $pr(n)$ c'est-à-dire que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
   Alors $1+2+3+\cdots+n+(n+1) = (1+2+3+\cdots+n)) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$
   $= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ donc $pr(n+1)$ est vraie.
   (c) **Conclusion :**
   $\left\{ \begin{array}{l} pr \text{ est initialisée en } 1 \\ pr \text{ est héréditaire} \end{array} \right.$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad pr(n)$ est vraie.
   Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. Notons $pr(n)$: "$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$"

   (a) **Etape 1 : Initialisation**

   A-t-on $pr(1)$? c'est-à-dire a-t-on $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}$?

   Oui car $\frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1$

   (b) **Etape 2 : Hérédité**

   Supposons que pour un certain entier $n \geq 1$ l'on ait $pr(n)$ c'est-à-dire que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   Alors $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)\right) + (n+1)^2$

   $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

   $= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\,(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)\left(2n^2 + 7n + 6\right)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

   donc $pr(n+1)$ est vraie.

   (c) **Conclusion :**

   $\begin{cases} pr \text{ est initialisée en } 1 \\ pr \text{ est héréditaire} \end{cases}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad pr(n)$ est vraie.

   Par conséquent, $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. Notons $pr(n)$: "$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$"

   (a) **Etape 1 : Initialisation**

   A-t-on $pr(1)$? c'est-à-dire a-t-on $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$? Oui car $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$

   (b) **Etape 2 : Hérédité**

   Supposons que pour un certain entier $n \geq 1$ l'on ait $pr(n)$ c'est-à-dire que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   Alors $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)\right) + (n+1)^3$

   $= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2\left(n^2 + 4n + 1\right)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ donc $pr(n+1)$ est vraie.

   (c) **Conclusion :**

   $\begin{cases} pr \text{ est initialisée en } 1 \\ pr \text{ est héréditaire} \end{cases}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad pr(n)$ est vraie.

   Par conséquent, $S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = S_1^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1^2$

4. $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 1+3+5+\cdots+(2n+1) = (n+1)^2$

5. $\sum_{k=1}^{n} k(k!) = 1(1!)+2(2!)+3(3!)+\cdots+n(n!) = (n+1)!-1$

6. Soit la propriété $pr(n)$: "$u_n = n$"

   (a) Etape 1 Initialisation : Démontrons que $pr(1)$ est vraie c'est-à-dire que $u_1 = 1$.
   Comme $\sum_{k=1}^{1} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2$ donc $u_1^3 = u_1^2$ donc $u_1^3 - u_1^2 = 0$ d'où $u_1^2(u_1-1) = 0$. or $u_1^2 > 0$ car $u_1 > 0$ puisque $\forall n \geq 1 \quad u_n > 0$.
   Par conséquent $u_1 - 1 = 0$ donc $u_1 = 1$. CQFD.

   (b) Soit un certain $n \geq 1$. Supposons que pour tout entier naturel $k \leq n$, l'implication $pr(k)$ est vraie.
   Démontrons qu'alors $pr(k+1)$ est vraie.
   On sait que $\sum_{k=1}^{n+1} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$
   donc $u_1^3 + u_2^3 + \cdots + u_n^3 + u_{n+1}^3 = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1})^2$
   d'où $(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)^2 + u_{n+1}^3 = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)^2 + 2(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)(u_{n+1}) + u_{n+1}^2$
   Alors $u_{n+1}^3 = 2(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)(u_{n+1}) + u_{n+1}^2$
   Par conséquent, $u_{n+1}^3 - u_{n+1}^2 - 2(1+2+\cdots+n)(u_{n+1}) = 0$ d'où $u_{n+1}\left(u_{n+1}^2 - u_{n+1} - n(n+1)\right) = 0$
   Posons $X = u_{n+1}$.
   Nous devons donc résoudre l'équation $X^2 - X - n(n+1) = 0$
   $\delta = (-1)^2 - 4(-n(n+1)) = 1 + 4n(n+1) = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$
   L'équation du second degré admet donc 2 solutions :
   $X' = \frac{1-(2n+1)}{2} = -\frac{2n}{2} = -n$
   $X" = \frac{1+(2n+1)}{2} = \frac{2n+2}{2} = n+1$
   Comme $u_{n+1} > 0$ alors on rejette X' donc $u_{n+1} = X" = n+1$ CQFD.

   (c) pr est initialisée en 1 et pr est bien héréditaire donc pr est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$

5.4 Fausse récurrence

Soit la propriété $pr(n)$: « $5^n + 1$ est un multiple non nul de 4 »

1. Cette propriété est-elle vraie pour $n = 0$?
2. Démontrer que pour tout entier naturel k, l'implication $pr(k) \Rightarrow pr(k+1)$ est vraie.
3. Conclusion ?

5.4.1 corrigé

Soit la propriété $pr(n)$: « $5^n + 1$ est un multiple non nul de 4 »

1. $pr(0)$ est fausse car $5^0 + 1 = 2$ n'est pas un multiple non nul de 4
2. Et pourtant, pour tout entier naturel k, l'implication $pr(k) \Rightarrow pr(k+1)$ est vraie.
   en effet, supposons que pour un certain entier $k \geq 0$ l'on ait $pr(k)$ c'est-à-dire que $5^k + 1$ est un multiple non nul de 4 donc $\exists q \in \mathbb{Z}^*$ tel que $5^k + 1 = 4q$ d'où $5^k = 4q - 1$
   Alors $5^{k+1} + 1 = 5(5^k) + 1 = 5(4q - 1) + 1 = 20q - 5 + 1 = 20q - 4 = 4(5q - 1) = 5q'$ où $q' = 5q - 1 \in \mathbb{Z}^*$. Donc $pr(k+1)$ est vraie CQFD.
3. On est en présence d'une fausse récurrence car pr est bien héréditaire mais n'est pas initialisée en 0

5.5 Encore une fausse récurrence

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n la propriété suivante :"$10^n - 1$ est un multiple de 9" est vraie.
2. On s'intéresse maintenant à une autre propriété :"$10^n + 1$ est divisible par 9"
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n,
   l'implication suivante : " $10^n + 1$ est divisible par 9 $\Rightarrow$ $10^{n+1} + 1$ est divisible par 9 " est vraie.
   (b) Déduire du 1°) que, pour tout entier naturel n la propriété "$10^n + 1$ est divisible par 9" n'est jamais vraie.
   (c) Conclusion ?

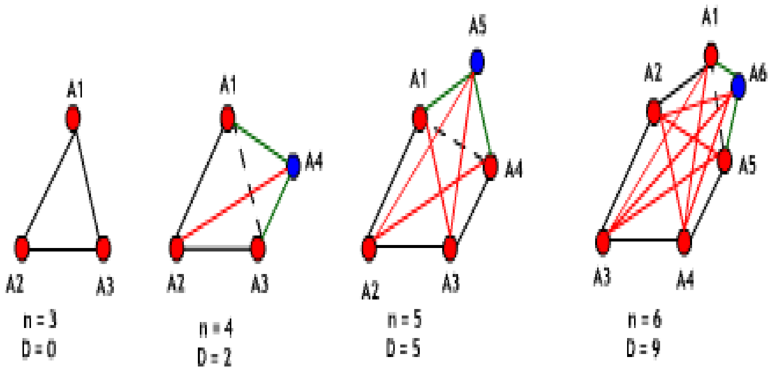
5.5.1 Corrigé

1. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n la propriété suivante :"$10^n - 1$ est un multiple de 9" est vraie. Notons $pr(n)$: "$10^n - 1$ est un multiple de 9.
   (a) Initialisation :
   $10^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 9 \times 0$ donc la propriété pr est initialisée en $n = 0$
   (b) Hérédité :
   Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ l'on ait $pr(n)$ alors $\exists k \in \mathbb{N} \quad 10^n - 1 = 9k$
   Par conséquent, $10^{n+1} - 1 = 10(10^n) - 1 = 10(9k + 1) - 1 = 90k + 10 - 9 = 90k + 9 = 9(10k + 1) = 9k'$ où $k' \in \mathbb{N}$ donc $pr(n + 1)$ est vraie.
   (c) Conclusion :
   pr est initialisée en 0 et pr est héréditaire donc pr est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$
   (d) On s'intéresse maintenant à une autre propriété :"$10^n + 1$ est divisible par 9"
      i. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ l'on ait $\exists k \in \mathbb{N} \quad 10^n - 1 = 9k$
      Par conséquent, $10^{n+1} - 1 = 10(10^n) - 1 = 10(9k + 1) - 1 = 90k + 10 - 1 = 90k + 9 = 9(10k + 1) = 9k'$ où $k' \in \mathbb{N}$ l'implication suivante : " $10^n + 1$ est divisible par 9 $\Rightarrow$ $10^{n+1} + 1$ est divisible par 9 " est vraie.
      ii. Pour tout entier naturel n la propriété "$10^n + 1$ est divisible par 9" n'est jamais vraie car
      $10^n + 1 = 10^n - 1 + 2 = 9k + 2$
      iii. En conclusion, pour la propriété "$10^n + 1$ est divisible par 9"on a une fausse récurrence.

5.6 Le nombre de diagonales d'un polygône convexe

Soit un polygône convexe de n côtés. Démontrer par récurrence que si n est un entier supérieur ou égal à 3 alors le nombre de diagonales est $\dfrac{n(n-3)}{2}$
NB – Un polygone est convexe lorsque quelques soient les points M et N situés dans l'intérieur de ce polygône, le segment $[MN]$ est inclus dans cet intérieur.

5.6.1 corrigé



Notons D_n le nombre de diagonales. Soit la propriété $pr(n)$: " $D_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$ "

1. $pr(3)$ est vraie car $D_3 = 0 = \dfrac{3(3-3)}{2}$. Dans un triangle, il n'y a aucune diagonale.
2. Supposons que pour un certain entier $k \geq 3$ l'on ait $D_k = \dfrac{k(k-3)}{2}$. Considérons alors un polygône R convexe de $k+1$ côtés. Donc ce polygône R a $k+1$ sommets. Notons ces sommets $A_1, A_2, \cdots, A_k, A_{k+1}$. Soit Q le polygône $A_1, A_2, \cdots, A_k$. Ce polygône Q a donc D_k diagonales. On construit R à partir de Q en ajoutant le sommet A_{k+1}. On trace les segments $[A_1A_{k+1}]$ et $[A_kA_{k+1}]$. Mais alors l'ancien côté $[A_1A_k]$ de Q devient alors une diagonale de R. Le nombre D_{k+1} de R est $D_k+k-2+1$ où
   (a) D_k est le nombre de diagonales de Q
   (b) k : le nombre de segments partant de A_{k+1} vers les k autres sommets $A_1, A_2, \cdots, A_k$.
   (c) il faut enlever -2 correspondants aux deux nouveau côtés $[A_1A_{k+1}]$ et $[A_kA_{k+1}]$
   (d) il faut rajouter $+1$ correspondant à la nouvelle diagonale $[A_1A_k]$

   Or $D_k+k-2+1 = \dfrac{k(k-3)}{2}+k-1 = \dfrac{k^2-3k+2k-2}{2} = \dfrac{k^2-k+2k-2}{2} = \dfrac{(k+1)(k-2)}{2}$. Par conséquent, $D_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k+1-3)}{2}$. CQFD.
3. La propriété est initialisée en 3 et héréditaire donc elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 3$

5.7 Multiples de 11

> Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11

5.8 Corrigé

On pose $pr(n)$: "$10^n - (-1)^n = 11q$" où $q \in \mathbb{Z}$

1. Etape 1 : initialisation
   A-t-on $pr(0)$? c'est-à-dire a-t-on $10^0 - (-1)^0 = 11q$? c'est-à-dire a-t-on $1 - 1 = 11q$? c'est-à-dire a-t-on $0 = 11q$? Oui car $0 = 11 \times 0$
   Par conséquent $pr(0)$ est vraie.
2. Etape 2 : hérédité
   Soit un certain entier $k \geq 0$. A-t-on $pr(k) \Longrightarrow pr(k+1)$?
   c'est-à-dire a-t-on $\exists q \in \mathbb{Z}\ 10^k - (-1)^k = 11q \Longrightarrow \exists q' \in \mathbb{Z}\ 10^{k+1} - (-1)^{k+1} = 11q'$
   Supposons donc que $10^k - (-1)^k = 11q$.
   Alors $10^{k+1} - (-1)^{k+1} = 10(10^k) - (-1)^k(-1) = 10[11q + (-1)^k] + (-1)^k = 10 \times 11q + 11(-1)^k = 11[10q + (-1)^k] = 11q'$ où $q' = 10q + (-1)^k$ est un entier car $(-1)^k$ est un entier qui vaut soit 1 soit -1 et $10q$ est un entier relatif car q est un entier relatif.
3. Conclusion pr est initialisé en 0 et pr est héréditaire donc pr est vraie pour tout entier naturel n

5.9 Inégalité

> Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 3$ que $n^2 > 2n+1$

5.9.1 Corrigé

1. Etape 1 : initialisation
   A-t-on $pr(3)$? c'est-à-dire a-t-on $3^2 > 2(3)+1$? c'est-à-dire a-t-on $9 > 7$?
   Oui, par conséquent $pr(3)$ est vraie.
2. Etape 2 : hérédité
   Soit un certain entier $k \geq 3$. A-t-on $pr(k) \Longrightarrow pr(k+1)$?
   c'est-à-dire a-t-on $n^2 > 2n+1 \Longrightarrow (n+1)^2 > 2(n+1)+1$
   Supposons donc que $n^2 > 2n+1$.
   Alors $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.
   Comme $n^2 > 2n+1$ alors $(n+1)^2 > 2n+1+2n+1$.
   Or $n \geq 3$ donc $2n \geq 6$ donc $2n > 1$ donc $1 + 2n + 1 > 1 + 1 + 1$.
   Par conséquent $2n+1+2n+1 > 2n+3$ donc $(n+1)^2 > 2n+3$ CQFD.
3. Conclusion pr est initialisé en 3 et pr est héréditaire donc pr est vraie pour tout entier naturel $n \geq 3$

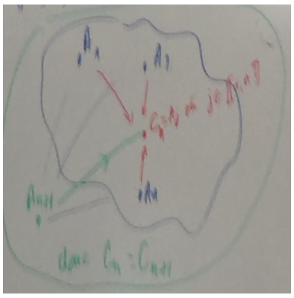
5.10 Graphe orienté

> Son considère n villes $A-1, A_2, \cdots, A_n$ où $n \geq 2$. On suppose qu'entre deux villes quelconques, il y a toujours une route à sens unique. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$ il existe toujours au moins une ville notée C_n parmi ces n villes à laquelle on peut aller en partant de toutes les autres villes , soit à l'aide d'un chemin direct, soit en visitant une seule ville intermédiaire.

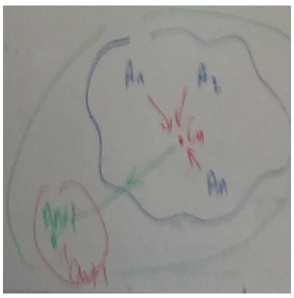
5.10.1 corrigé

Soit pr la propriété recherchée.

1. Etape 1 : initialisation
   A-t-on $pr(2)$? oui car entre 2 villes A_1 et A_2 il y a deux cas possibles :
   - ou bien le chemin va de A_1 vers A_2 donc $C_2 = A_2$
   - ou bien le chemin va de A_2 vers A_1 donc $C_2 = A_1$
2. Etape 2 : hérédité
   Soit un certain entier $n \geq 2$. Supposons donc qu'il existe toujours au moins une ville notée C_n parmi n villes à laquelle on peut aller en partant de toutes les autres villes , soit à l'aide d'un chemin direct, soit en visitant une seule ville intermédiaire.
   Considérons une ville supplémentaire A_{n+1} Il y a un chemin de A_{n+1} vers C_n
   - ou bien le chemin va de A_{n+1} vers C_n donc $C_{n+1} = C_n$



   - ou bien le chemin va de C_n vers A_{n+1} donc $C_{n+1} = A_{n+1}$



   CQFD.
3. Conclusion pr est initialisé en 2 et pr est héréditaire donc pr est vraie pour tout entier naturel $n \geq 2$

5.11 Suite de Fibonacci alias Léonard de Pise

Soit une suite (u_n) définie par :

- $u_1 = 1$
- $u_2 = 1$
- $\forall n$ entier ≥ 3 $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

1. Résoudre l'équation d'inconnue x réelle : $x^2 = x + 1$.
   On note Φ la solution positive et Ψ l'autre solution.
2. Démontrer par une récurrence double que pour tout entier naturel n :
   $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \Psi^n)$

Corrigé :

1. Soit l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$ d'inconnue réelle x.
   (a) Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5$.
   Comme $\Delta > 0$ alors cette équation a deux solutions réelles :
   $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\Psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
   (b) $\Phi + \Psi = -\dfrac{b}{a} = 1$, $\Phi\Psi = \dfrac{c}{a} = -1$, $\Phi - \Psi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$
   (c) Comme Φ est solution de $x^2 - x - 1 = 0$ alors $\Phi^2 = \Phi + 1$.

   (d) Comme Ψ est solution de $x^2 - x - 1 = 0$ alors $\Psi^2 = \Psi + 1$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
   $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \Psi^n)$
   (a) Initialisation double : La propriété recherchée est vraie pour les deux premières valeurs :
   $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^1 - \Psi^1) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi - \Psi) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5} = 1 = u_1$
   $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^2 - \Psi^2) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}((\Phi+1) - (\Psi+1)) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi - \Psi) = 1 = u_2$
   (b) Hérédité : supposons que pour un certain entier $k \geq 1$ l'on a :
   $u_k = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^k - \Psi^k)$ et $u_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{k+1} - \Psi^{k+1})$
   alors $u_{k+2} = u_k + u_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^k - \Psi^k) + \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{k+1} - \Psi^{k+1})$
   donc $u_{k+2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}((\Phi^k + \Phi^{k+1}) - (\Psi^k + \Psi^{k+1}))$
   $= \dfrac{1}{\sqrt{5}}((\Phi^k(1+\Phi) - \Psi^k(1+\Psi))$
   Or $1 + \Phi = \Phi^2$ et $1 + \Psi = \Psi^2$ donc $u_{k+2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{k+2} - \Psi^{k+2})$

   (c) On a démontré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$ l'on a : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \Psi^n)$

5.12 Puissance d'une matrice

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \neq 0$ l'on a :
$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.12.1 corrigé

Notons $pr(n)$: "$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Initialisation :
   $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc la propriété pr est initialisée en $n = 1$
2. Hérédité :
   Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ l'on ait $pr(n)$ alors $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   Par conséquent, $A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $pr(n+1)$ est vraie.
3. Conclusion :
   pr est initialisé en 1 et pr est héréditaire donc pr est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$

5.13 Formule du binôme de Newton(1642-1727)

Soient a et b des nombres réels donc $ab = ba$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \ b^{n-i}$$

Or $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} \ b^j$$

en effectuant le changement d'indice $j = n - i$

5.13.1 Corrigé

Notons $pr(n) : (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \ b^{n-i}$.

1. Initialisation : elle est vraie en $n = 0$ car :
   $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 \ b^{0-0}$
2. Hérédité : Supposons que la propriété est vraie pour un entier fixé $k \geq 0$ c'est-à-dire que :
   $(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^k \ b^{n-k}$
   Alors $(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = (a+b)[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^k \ b^{n-k}]$
   $= (a+b)(\binom{k}{0} a^0 b^k + \binom{k}{1} a^1 \ b^{k-1} + \cdots + \binom{k}{i} a^i \ b^{k-i} + \cdots + \binom{k}{k-1} a^{k-1} \ b^1 + \binom{k}{k} a^k b^0)$
   $= (a+b)(b^k + \binom{k}{1} a^1 \ b^{k-1} + \cdots + \binom{k}{i} a^i \ b^{k-i} + \cdots + \binom{k}{k-1} a^{k-1} \ b^1 + a^k)$
   $= (ab^k + \binom{k}{1} a^2 \ b^{k-1} + \cdots + \binom{k}{i} a^{i+1} \ b^{k-i} + \cdots + \binom{k}{k-1} a^k \ b^1 + a^{k+1}$
   $+ b^{k+1} + \binom{k}{1} a^1 \ b^k + \cdots + \binom{k}{i} a^i \ b^{k-i+1} + \cdots + \binom{k}{k-1} a^{k-1} \ b^2 + a^k b)$
   $= b^{k+1} + ab^k[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}] + a^2 \ b^{k-1}[\binom{k}{2} + \binom{k}{1}] + \cdots + a^i \ b^{k-i+1}[\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}] + a^{i+1} \ b^{k-i}[\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1}] + \cdots + a^k \ b^1[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}] + a^{k+1}$
   $= \ b^{k+1} + ab^k \binom{k+1}{1} + a^2 \ b^{k-1} \binom{k+1}{2} + \cdots + a^i \ b^{k-i+1} \binom{k+1}{i} + a^{i+1} \ b^{k-i} \binom{k+1}{i+1} + \cdots + a^k \ b^1 \binom{k+1}{k} + a^{k+1}$

$= \binom{k+1}{0} a^0 b^{k+1} + ab^k \binom{k+1}{1} + a^2\, b^{k-1} \binom{k+1}{2} + \cdots + a^i\, b^{k-i+1} \binom{k+1}{i} +$
$a^{i+1}\, b^{k-i} \binom{k+1}{i+1} + \cdots + a^k\, b^1 \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} a^{k+1} b^0$

3. Conclusion : pr étant initialisée en 0 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$

Cette formule est valable pour tous éléments a et b d'un anneau à condition que ces éléments soient commutables c'est-à-dire que $ab = ba$.
C'est le cas pour des matrices carrées d'ordre n : A et B à condition d'avoir vérifié que $AB = BA$.
Souvent $A = I$ la matrice de l'identité donc $IB = B$ et $BI = B$ donc $IB = BI$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (I+B)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} I^{n-j}\ B^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} I\ B^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B^j$$

Si en plus, B est **nilpotente** par exemple, si $B^3 = O$
donc $\forall n \geq 3 \quad B^n = B^3 B^{n-3} = O$ d'où
$(I+B)^n = \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \binom{n}{2} B^2 = I + nB + \dfrac{n(n-1)}{2} B^2$

5.14 Formule de Leibniz

Soient des fonctions f et g dérivables indéfiniment sur $\mathbb{R}$. Alors leur produit fg est aussi indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ (fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} \ g^{(n-i)}$$

5.14.1 Corrigé

Notons $pr(n) : (fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} \ g^{(n-i)}$.

1. Initialisation : elle est vraie en $n = 1$ car :
   $(fg)' = fg' + f'g = \binom{1}{0} f^{(0)} \ g^{(1-0)} + \binom{1}{1} f^{(1)} \ g^{(1-1)} = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} f^{(i)} \ g^{(1-i)}$
2. Hérédité : Supposons que la propriété est vraie pour un entier fixé $k \geq 1$
   c'est-à-dire que : $(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} \ g^{(k-i)}$.
   Alors $(fg)^{(k+1)} = [(fg)^{(k)}]' = [\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} \ g^{(k-i)}]' = \sum_{i=0}^{k} [\binom{k}{i} f^{(i)} \ g^{(k-i)}]'$.
   $= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} [f^{(i)} \ g^{(k-i)}]' = \sum_{i=0}^{k} [\binom{k}{i} [f^{(i+1)} \ g^{(k-i)} + f^{(i)} \ g^{(k-i+1)}]$
   $= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i+1)} \ g^{(k-i)} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} \ g^{(k-i+1)}$
   $= \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} f^{(j)} \ g^{(k-j+1)} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} \ g^{(k+1-j)}$ en effectuant le changement d'indice $j = i + 1$ dans la première somme et $j = i$ dans la deuxième somme.
   Donc $(fg)^{(k+1)} = \binom{k}{0} f^{(0)} \ g^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{k} [\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j}] f^{(j)} \ g^{(k+1-j)} + \binom{k}{k} f^{(k+1)} \ g^{(0)}$
   $(fg)^{(k+1)} = \binom{k+1}{0} f^{(0)} \ g^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k+1}{j} f^{(j)} \ g^{(k+1-j)} + \binom{k+1}{k+1} f^{(k+1)} \ g^{(0)}$
   $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} f^{(i)} \ g^{(n+1-i)}$ donc $pr(n+1)$ est vraie.
3. Conclusion : pr étant initialisée en 1 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$

Applications : On vérifie aisément cette formule sur quelques cas particuliers :

1. $(fg)' = f'g + fg'$
2. $(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg''$
3. $(fg)^{(3)} = ((fg)'')' = f'''g + f''g' + 2f''g' + 2f'g'' + f'g'' + fg''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$

5.15 Factorisation de $a^n - b^n$

1. Soient a et b des réels.
   Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$ l'on a :
   $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$
   Indication : pour l'hérédité, on pourra utiliser l'astuce suivante :
   $a^{k+1} - b^{k+1} = aa^k - ab^k + ab^k - bb^k$
2. En déduire une factorisation de $1 - x^n$ pour tout entier $n \geq 2$
3. Soit un entier $n \geq 2$, soient la fonction numérique f d'une variable réelle définie par
   $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$
   et la fonction numérique g définie par
   $g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$
   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ? Quel est l'ensemble de définition de g ?
   (b) Si l'on suppose que $x = 1$, que vaut $f(x)$ et que vaut $g(x)$?
   (c) Si l'on suppose que $x \neq 1$:
   - Déterminer une expression simplifiée de $f(x)$ sous forme d'un quotient.
   - Déterminer une expression simplifiée de $g(x)$ sous forme d'un quotient.
   - En utilisant le produit $xf(x)$ retrouver l'expression simplifiée de $f(x)$

5.15.1 Corrigé

1. Soient a et b des réels.
   Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$ l'on a :
   $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$

   - Etape 1 : pour n = 2, comme $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ alors la propriété est vraie au rang $n = 2$
   - Etape 2 : soit un entier $n \geq 2$ tel que l'on a :
     $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$
     Alors $a^{n+1} - b^{n+1} = aa^n - ab^n + ab^n - bb^n = a(a^n - b^n) + (a-b)b^n$
     $= a(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) + (a-b)b^n$
     $= (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + a^3b^{n-3} + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}) + (a-b)b^n$
     $= (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + a^3b^{n-3} + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n)$
     donc la propriété est vraie au rang $n + 1$
   - La propriété étant initialisée en 2 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier $n \geq 2$
2. En déduire une factorisation de $1 - x^n$ pour tout entier $n \geq 2$
   On en déduit en posant $a = 1$ et $b = x$ et étant tenant compte du fait que $\forall k \ 1^k = 1$
   $1 - x^n = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-3} + x^{n-2} + x^{n-1})$
3. Soit un entier $n \geq 2$, soient la fonction numérique f d'une variable réelle définie par

$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$
et la fonction numérique g définie par
$g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$

(a) Quel est l'ensemble de définition de f ? Quel est l'ensemble de définition de g ?
f est une fonction polynôme de degré n donc est définie sur $\mathbb{R}$
g est une fonction polynôme de degré $n-1$ donc est définie sur $\mathbb{R}$

(b) Si l'on suppose que $x = 1$, que vaut $f(x)$ et que vaut $g(x)$?
$f(1) = 1 + 1^1 + 1^2 + \cdots + 1^n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1$
$g(1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(c) Si l'on suppose que $x \neq 1$:
- Déterminer une expression simplifiée de $f(x)$ sous forme d'un quotient.
  Comme $1 - x^n = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-3} + x^{n-2} + x^{n-1})$
  alors
  $1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-3} + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n)$
  $f(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ car $x \neq 1$
- Déterminer une expression simplifiée de $g(x)$ sous forme d'un quotient.
  Comme f est une fonction polynôme de degré n alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = g(x)$ donc $g(x) = \dfrac{-(n+1)x^n(1-x) - (-1)(1 - x^{n+1})}{(1-x)^2}$
  En simplifiant $g(x) = \dfrac{x^n(-n - 1 + nx) + 1}{(1-x)^2}$
- En utilisant le produit $xf(x)$ retrouver l'expression simplifiée de $f(x)$
  $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$
  $xf(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1}$
  donc $f(x) - xf(x) = 1 - x^{n+1}$ d'où $f(x)(1-x) = 1 - x^{n+1}$ donc
  $f(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ car $x \neq 1$

5.16 Exponentielle

Soit un réel $x \geq 0$.
Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x$$

5.16.1 Corrigé

Notons $pr(n)$: "$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x$"

1. Etape 1 : Initialisation en $n = 0$:

   A-t-on $pr(0)$? c'est-à-dire a-t-on $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!} \leq e^x$? c'est-à-dire a-t-on $\frac{x^0}{0!} \leq e^x$ c'est-à-dire a-t-on $1 \leq e^x$?
   oui car comme $x \geq 0$ alors exp étant une fonction croissante alors $exp(x) \geq exp(0)$ donc $e^x \geq 1$.
   La propriété est vraie au rang $n = 0$
2. Etape 2 : Hérédité :
   Soit un entier $n \geq 0$.
   Supposons que $pr(n)$ est vraie c'est-à-dire que $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x$.

   Démontrons que $pr(n+1)$ est vraie c'est-à-dire que $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} \leq e^x$.

   Notons $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ alors $P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$ $P'_{n+1}(x) = [\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}]' = \sum_{k=0}^{n+1} [\frac{x^k}{k!}]' = \sum_{k=0}^{n+1} k\frac{x^{k-1}}{k!}$
   $P'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} k\frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$ en posant $j = k - 1$
   D'après l'hypothèse de récurrence : $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x$ donc $P'_{n+1}(x) \leq e^x$
   Posons $f(x) = P_{n+1}(x) - e^x$ alors $f'(x) = P'_{n+1} - e^x \leq 0$ d'où

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	

   car $f(0) = P_{n+1}(0) - e^0 = 1 - 1 = 0$.
   Par conséquent, $f(x) \leq 0$ donc $P_{n+1} \leq e^x$ donc $pr(n+1)$ est vraie.
3. Conclusion : pr étant initialisée en 0 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$

5.17 Suite

Soit une suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} =$

$$\begin{cases} \dfrac{u_n}{2} \; si \; n \; est \; pair \\ u_n + 1 \; si \; n \; est \; impair \end{cases}$$

1. Déterminer les 8 premiers termes de cette suite.
2. Déterminer par récurrence que pour tout entier naturel p :

$$\begin{cases} u_{2p} = \dfrac{a}{2^p} + \dfrac{2^p - 1}{2^{p-1}} \\ u_{2p+1} = \dfrac{a}{2^{p+1}} + \dfrac{2^p - 1}{2^p} \end{cases}$$