Introduction au calcul matriciel

Christian CYRILLE

27 octobre 2016

"Dessiner une belle matrice est simple, la faire fonctionner demande des milliers d'heures d'explication"
Percy Barnevik

1 Activités d'introduction

1.1 Activité 1

Lors d'un examen, on a relevé les notes de langues vivantes LV_1, LV_2 et LV_3 pour plusieurs élèves.
Ces notes sont plaçées dans la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 14 & 16 & 18 & 17 \\ 10 & 13 & 14 & 14 & 15 & 15 \\ 18 & 19 & 13 & 12 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

1. Donner l'ordre de cette matrice A.
2. Que représente la première ligne de cette matrice ?
3. Quelle est la note obtenue en LV_1 par l'élève 3 ?
4. Donner la valeur des éléments a_{11},a_{23},a_{33} et a_{36}

1.2 Activité 2

Une société de vente par internet propose quatre sortes de vêtements de sport : maillots, shorts, chaussures et survêtements.
Elle propose 6 tailles pour chaque modèle.
Les prix HT, en €, sont donnés par la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 11 & 11 & 12 & 12 \\ 6 & 6 & 7 & 8 & 8 & 9 \\ 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 \\ 70 & 70 & 70 & 80 & 80 & 80 \end{pmatrix}$$

pour chaque article acheté, la société propose :

- une casquette à 2€ si le prix de l'article est strictement inférieur à 20€
- une casquette à 1€ si le prix de l'article est compris entre 20€ et 70€
- une casquette gratuite si le prix de l'article est strictement supérieur à 70€

1. Ecrire la matrice B donnant le prix d'une casquette pour chaque article.
2. Ecrire la matrice dont chaque terme est le prix total du lot formé d'un article et de la casquette correspondante

1.3 Activité 3

Une petite entreprise commercialise 3 produits P_1,P_2 et P_3.
A la fin d'une période de 4 semaines, les quantités vendues par semaine sont données par la matrice des quantités Q suivante de dimension 4×3 :

$$Q = \begin{pmatrix} 45 & 120 & 10 \\ 50 & 90 & 15 \\ 32 & 132 & 12 \\ 40 & 98 & 9 \end{pmatrix}$$

Durant la période de quatre semaines, le prix unitaire hors taxe du produit P_1 est de 2€, pour le produit P_2 de 1€ et pour le produit P_3 de 3€.

1. Ecrire la matrice diagonale P avec les prix unitaires sur la diagonale principale.
2. Déterminer la matrice V des prix de vente hors taxe pour ces 4 semaines.
3. Déterminer la matrice TTC formée des montants que l'entreprise a encaissé pour la vente de tous les produits P_1, P_2 et P_3 pour la période étudiée avec un taux de TVA de $19,6\%$ sur ces produits.

1.4 Activité 4

On considère les 2 suites réelles (u_n) et (v_n) définies par leurs premiers termes u_0 et v_0 et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\forall n \in \mathbb{N} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$
2. Montrer que l'on peut écrire $A = 5I + J$ où I est la matrice unité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et J une matrice que l'on déterminera.
3. Calculer J^2 puis J^k pour tout $k \geq 2$
4. Calculer alors A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$
5. En déduire les expressions de u_n et de v_n en fonction de n, u_0 et v_0

1.5

Le calcul matriciel est trés utilisé en économie, en particulier en comptabilité nationale avec le tableau d'entrées-sorties(TES) et les matrices de Leontiev.
Soit A la matrice des coefficients techniques, X le vecteur production et D le vecteur demande finale alors :

consommation intermédiaire + demande finale = production

$$\iff AX + D = X \iff D = X - AX \iff D = IX - AX \iff D = (I - A)X \iff X = (I - A)^{-1}D$$

2 Définitions

2.1 Définition d'une matrice à n lignes et p colonnes

C'est un tableau de n p éléments a_{ij} où a_{ij} est un réel situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ième colonne, le numéro de ligne i variant de 1 à n et le numéro de colonne j variant de 1 à p.
La matrice M se note simplement $M = (a_{ij})$.

Par exemple, pour $n = 5$ et $p = 4$ alors $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix}$

2.2 Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

c'est l'ensemble de toutes les matrices $M = (a_{ij})$ où les a_{ij} sont des réels.
Lorsque $n = p$, les matrices sont dites carrées d'ordre n. Dans ce cas $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2.3 Matrice ligne

C'est un élément de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.
Exemple : pour $p = 3$, $M = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

2.4 Matrice colonne

C'est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemple : pour $n = 4$, $M = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

2.5 Matrice nulle $\mathcal{O}_{n,p}(\mathbb{R})$

C'est la matrice (a_{ij}) où pour tout i variant de 1 à n et pour tout j variant de 1 à p , $a_{ij} = 0$.
Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, $\mathcal{O}_{n,p}(\mathbb{R})$ se note simplement $\mathcal{O}/$

Exemple : pour $n = 3$ et $p = 2$, $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 Opérations matricielles

3.1 Somme de matrices

Si $M = (a_{ij})$ et $N = (b_{ij})$ sont de matrices **de même format** (n, p) alors on appelle somme des matrices M et N qu'on note $M + N$ la matrice suivante : $(a_{ij} + b_{ij})$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 14 \\ 16 & 6 \end{pmatrix}$

3.2 Multiplication à gauche d'une matrice par un réel

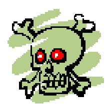
Si $k \in \mathbb{R}$ et $M = (a_{ij})$ une matrice **de format** (n, p) alors on appelle kM la matrice suivante : $(k\,a_{ij})$.
Notation : $(-1)M$ **se note** $-M$.

Exemple : Si $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -2 & -5 & -8 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ alors $2M = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 14 \\ -4 & -10 & -16 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

3.3 Produit d'une matrice de format (n, p) par une matrice de format (p, q)

Si $M = (a_{ij})$ est une matrice de format (n, p) et $N = (b_{ij})$ une matrice de format (p, q) alors on appelle produit des matrices M et N qu'on note $M\,N$ la matrice suivante : (c_{ij}) où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

Exemple : Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 8 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ alors $M\,N = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 19 & 4 & 25 \\ 27 & 6 & 41 & 12 & 55 \\ 41 & 10 & 63 & 20 & 85 \\ 7 & 14 & 21 & 28 & 35 \end{pmatrix}$



- **Le produit de deux matrices n'est pas toujours possible**. Il faut que le nombre de colonnes de celle qui est placée à gauche soit égal au nombre de lignes de celle qui est placée à droite.
- **Le produit de matrices lorsqu'il est possible n'est pas forcément commutatif** :
  $\exists M \quad \exists N \quad MN \neq NM$
  Exemple : Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $MN = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $NM = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- L'exemple précédent montre aussi que **le produit de deux matrices non nulles peut être la matrice nulle**. On dit ici que M et N sont **des diviseurs de zéro.**

3.4 Structure d'espace vectoriel pour $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),+,.)$

1. L'addition $+$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ vérifie les 5 propriétés suivantes :
   (a) $+$ est une loi de composition interne dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:
   $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \forall N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad M+N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
   (b) $+$ est associative :
   $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \forall N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \forall P \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad (M+N)+P = M+(N+P)$
   (c) $+$ admet un élément neutre dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:
   $\exists \mathcal{O} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad M+\mathcal{O} = \mathcal{O}+M = M$
   (d) Tout élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ admet un symétrique pour $+$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:
   $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \exists M' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad M+M' = M'+M = \mathcal{O}$ c'est $M' = -M$.
   (e) $+$ est commutative :
   $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \forall N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad M+N = N+M$

   On dit alors que $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),+)$ **est un groupe commutatif.**
2. La multiplication à gauche . par un nombre réel vérifie les 4 propriétés suivantes :
   (a) $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad 1\ M = M$
   (b) $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \quad (\lambda+\mu)M = \lambda M + \mu M$
   (c) $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \quad (\lambda\ \mu)M = (\lambda\ \mu)M$
   (d) $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \forall N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda(M+N) = \lambda M + \lambda N$
3. On dit alors que $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),+,.)$ possède une structure d'espace vectoriel réel.
   Un vecteur est ici une matrice, le vecteur nul est la matrice nulle $\mathcal{O}$

4 Autres propriétés

1. Le produit est distributif à droite et à gauche par rapport à l'addition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
   $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \forall N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \forall P \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
   $M(N+P) = MN+NP$
   $(M+N)P = MP+NP$
2. $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \forall N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda M)N = M(\lambda N) = \lambda(MN)$
3. $M+X = N \iff X = N-M$
4. $M+N = M+P \iff N = P$
5. $\mathcal{O}M = M\mathcal{O} = \mathcal{O}$

5 Matrices carrées

5.1 Définitions

Lorsque $n = p$, les matrices sont dites carrées d'ordre n.

5.1.1 Matrice triangulaire supérieure

C'est une matrice carrée $M = (a_{ij})$ où tous les a_{ij} sont nuls pour tous les couples (i, j) tels que $j < i$.
Exemple : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

5.1.2 Matrice triangulaire inférieure

C'est une matrice carrée$M = (a_{ij})$ où tous les a_{ij} sont nuls pour tous les couples (i, j) tels que $j > i$.
Exemple : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

5.1.3 Matrice diagonale

C'est une matrice carrée$M = (a_{ij})$ où tous les a_{ij} sont nuls pour tous les couples (i, j) tels que $j \neq i$.
Exemple : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5.1.4 Matrice symétrique

C'est une matrice carrée$M = (a_{ij})$ où $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous les couples (i, j).
Exemple : $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

5.1.5 Matrice Identité d'ordre n

C'est la matrice carrée diagonale I où tous les éléments de la diagonale principale valent 1.
Exemple : pour $n = 3$ on a $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.2 Propriétés

Les propriétés de l'addition et de la multiplication à gauche par un nombre réel sont donc valables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec en plus :

1. Le produit de deux matrices carrées de même format est interne dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
2. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad MI = IM = M$

5.3 Puissances d'une matrice

5.3.1 Définition

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad M^0 = I$ et $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad M^k = M\, M^{k-1}$

5.3.2 Propriétés

1. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \forall j \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}^* \quad (M^j)^k = M^{jk}$ et $M^j M^k = M^{j+k}$
2. Attention ! $(M+N)^2 = (M+N)(M+N) = M^2 + MN + NM + N^2$
3. **Formule du binôme de Newton pour des matrices carrées** A **et** B **commutables c'est-à-dire que** $AB = BA$:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (A+B)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^{n-j}\, B^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^j\, B^{n-j}$$

à cause de la symétrie des coefficients binomiaux puisque $\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$

Souvent $A = I$ la matrice de l'identité donc $IB = B$ et $BI = B$ donc $IB = BI$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (I+B)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} I^{n-j}\, B^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} I\, B^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B^j$$

Si de plus B **est nilpotent** c'est-à-dire $\exists k \in \mathbb{N}^* \quad B^k = \mathcal{O}$.
Supposons par exemple $B^3 = \mathcal{O}$ alors on démontre aisément que
$\forall j \geq 3 \quad B^j = \mathcal{O}$ car $\forall j \geq 3 \quad B^j = B^3 B^{j-3} = \mathcal{O} B^{j-3} = \mathcal{O}$.
Ce qui fait que la somme précédente se simplifiera encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (I+B)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B^j = \sum_{j=0}^{2} \binom{n}{j} B^j = \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \binom{n}{2} B^2$$

Donc $(I+B)^n = I + nB + \dfrac{n(n-1)}{2} B^2$

5.4 Matrice carrée inversible

5.4.1

On dit que la matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe une matrice carrée $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} M\,N = I \text{ on dit que M est inversible à droite} \\ N\,M = I \text{ on dit que M est inversible à gauche} \end{cases}$$

On note $N = M^{-1}$ sa matrice inverse.
L'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles muni du produit des matrices carrées a une structure de groupe. Ce groupe est noté $\mathcal{GI}_n(\mathbb{R})$

5.4.2 Propriétés

1. I est inversible et $I^{-1} = I$
2. S'il existe N telle que $MN = I$ et s'il existe P telle que $PM = I$ alors $N = P$ et par conséquent M est inversible et $M^{-1} = N = P$
3. S'il existe N telle que $MN = I$ alors $NM = I$ et par conséquent M est inversible et $M^{-1} = N$
4. Si A est inversible alors son inverse A^{-1} est aussi inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$
5. Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
6. Si A est inversible alors on peut résoudre aisément les équations suivantes :
   (a) $AX = B \iff A^{-1}AX = A^{-1}B \iff IX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$
   (b) $XA = B \iff XAA^{-1} = BA^{-1} \iff XI = BA^{-1} \iff X = BA^{-1}$
   (c) $AX = AY \iff A^{-1}AX = A^{-1}AY \iff IX = IY \iff X = Y$
   (d) $XA = YA \iff XAA^{-1} = YAA^{-1} \iff XI = YI \iff X = Y$

6 Ecriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire carré

6.1 Définition

Tout système de n équations linéaires à n inconnues s'écrit sous la forme $AX = B$.
Par exemple, le système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$$

s'écrit $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$

6.2 Interprétation matricielle des 3 règles concernant les opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire

6.2.1 Règle 1 : Permuter les lignes L_I et L_j

> Cela revient à multiplier **à gauche** la matrice A par la matrice $I_n(i,j)$ formée à partir de la matrice identité I_n dans laquelle on a permuté les lignes L_I et L_j.

Exemple : $L_2 \leftrightarrow L_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

6.2.2 Règle 2 : Multiplier la ligne L_i à gauche par un réel k

> Cela revient à multiplier **à gauche** la matrice A par la matrice $J_n(i,k)$ formée à partir de la matrice identité I_n dans laquelle on a multiplié la ligne L_I à gauche par un réel k

Exemple : $L_2 \leftarrow 3L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 15 & 18 & 21 & 24 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

6.2.3 Règle 3 : Remplacer la ligne L_i par $L_i + kL_j$

> Cela revient à multiplier **à gauche** la matrice A par la matrice $K_n(i,j,k)$ formée à partir de la matrice identité I_n dans laquelle on a remplacé la ligne L_i par $L_i + kL_j$

Exemple : $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 23 & 26 & 29 & 32 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

Si l'on veut avoir l'équivalent des règles sur les colonnes, il faut **multiplier à droite la matrice** A.

Exemple : $C_2 \leftrightarrow C_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 7 & 6 \\ 9 & 12 & 11 & 10 \\ 13 & 16 & 15 & 14 \end{pmatrix}$$

7 Détermination de l'inverse éventuelle d'une matrice carrée

7.1 Utilisation d'un polynôme annulateur

7.1.1 Cas d'une matrice d'ordre 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

alors $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2I + A.$

On a donc $A^2 - A - 2I = \mathcal{O}$. Soit le polynôme $P(x) = x^2 - x - 2$. On constate donc que $P(A) = 0$. P est donc un polynôme annulateur de A. On pourra donc prouver l'inversibilté de A :

Comme $A^2 - A = 2I$ donc $A^2 - AI = 2I$ d'où $A(A - I) = 2I$.

On en déduit que $A\,\frac{1}{2}(A - I) = I$ donc A est inversible et son inverse $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) =$
$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

7.2 Cas d'une matrice d'ordre 2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$

alors $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + db \\ ca + cd & cb + d^2 \end{pmatrix}$

Or $(a + d)A - (ad - bc)I = (a + d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + db \\ ca + cd & cb + d^2 \end{pmatrix}$

On obtient donc $A^2 = (a + d)A - (ad - bc)I$ d'où $A^2 - (a + d)AI = -(ad - bc)I$.

On en déduit que $A[A - (a + d)I] = -(ad - bc)I$ d'où $A[\frac{-1}{ad - bc}(A - (a + d)I)] = I.$

Par conséquent, A est inversible et

$A^{-1} = \frac{-1}{ad - bc}(A - (a + d)I) = \frac{-1}{ad - bc}[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a + d & 0 \\ 0 & a + d \end{pmatrix}] = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Théorème

> Toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ est inversible
> et $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

7.3 Méthode de Gauss-Jordan

On écrit côte à côte les matrices A et I. Ensuite par la méthode des pivots on essaie de transformer A en I

7.3.1 Exemple 1

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En utilisant la règle $L_2 \leftrightarrow L_1$

On obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En utilisant la règle $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

On obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En utilisant la règle $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$

On obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

En utilisant la règle $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

On obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

En utilisant la règle $L_3 \leftarrow -L_3$

On obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

En utilisant la règle $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

On obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

En utilisant la règle $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$

On obtient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad G = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

On a eu 3 **pivots non nuls :** 1, 1, 1**.** En examinant les transformations de A en I , on en déduit que :

- $I = K_n(2,3,2)K_n(1,3,-1)J_n(3,-1)K_n(3,2,-1)K_n(3,1,-5)K_n(2,1,-2)I_n(1,2)A = GA$ donc A **est inversible** et $A^{-1} = G$
- $G = GI = K_n(2,3,2)K_n(1,3,-1)J_n(3,-1)K_n(3,2,-1)K_n(3,1,-5)K_n(2,1,-2)I_n(1,2)I$
- Tout système associé $AX = B$ a donc une solution unique $X = A^{-1}B$. Un tel système est alors appelé **système de Cramer** du nom de Gabriel Cramer, mathématicien suisse (1704-1752).

7.3.2 Exemple 2

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En utilisant la règle $L_2 \leftrightarrow L_1$

On obtient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En utilisant la règle $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

On obtient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En utilisant la règle $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$

On obtient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

En utilisant la règle $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

On obtient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

On n'a eu que 2 pivots non nuls : 1, -3. Le 3ème pivot est 0.

- Le système associé $AX = B$ n'est pas de Cramer et admet soit aucune solution, soit une infinité de solutions.
- **A n'est pas inversible**

8 Matrice transposée

8.1 Définition

Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de format (n, p).
On appelle transposée de A qu'on note ${}^tA$ la matrice (a_{ji}) de format (p, n)

8.2 Exemples

1. Si $M = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ alors ${}^tM = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

2. Si $N = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ alors ${}^tM = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$ alors $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 14 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$

   ${}^tA +{}^t B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 16 \\ 10 & 14 & 18 \end{pmatrix} ={}^t (A+B)$

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 8 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ alors

   $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 8 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 19 & 4 & 25 \\ 27 & 6 & 41 & 12 & 55 \\ 41 & 10 & 63 & 20 & 85 \\ 7 & 14 & 21 & 28 & 35 \end{pmatrix}$$

   $${}^tB\,{}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 0 \\ 3 & 8 \\ 4 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 27 & 41 & 7 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 19 & 41 & 63 & 21 \\ 4 & 12 & 20 & 28 \\ 25 & 55 & 85 & 35 \end{pmatrix} ={}^t (AB)$$

8.3 Propriétés

1. ${}^t({}^tA) = A$
2. Pour tout réel k , ${}^t(kA) = k\,{}^tA$
3. Si A et B sont des matrices de même format alors ${}^t(A+B) ={}^t A + {}^tB$
4. **Attention !!! Lorsque le produit** AB **est possible** alors ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

9 Matrices symétriques et matrices antisymétriques

9.1 Définition

1. Une matrice carrée M est dite symétrique lorsque ${}^tM = M$ donc $\forall i \quad \forall j \quad a_{ij} = a_{ji}$. Les termes de la matrice sont symétriques par rapport à la diagonale principale.
2. Une matrice carrée M est dite antisymétrique lorsque ${}^tM = -M$ donc $\forall i \quad \forall j \quad a_{ij} = -a_{ji}$. Les termes de la diagonale principales sont forcément nuls.

9.2 Propriétés

Toute matrice carrée M se décompose de façon unique en la somme d'une matrice carrée symétrique et d'une matrice carrée antisymétrique.
On dira que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n est somme directe du sous espace vectoriel F des des matrices carrées symétriques et du sous espace vectoriel G des des matrices carrées antisymétriques.

9.2.1 Démonstration par analyse-synthèse

1. Analyse :
   Supposons que $M = S + A$ où S est une matrice symétrique (donc ${}^tS = S$)et A une matrice antisymétrique (donc ${}^tA = -A$).
   Alors ${}^tM =^t (S + A) =^t S + {}^tA = S - A$.
   Comme
   $$\begin{cases} M = S + A \\ {}^tM = S - A \end{cases}$$
   alors
   $$\begin{cases} S = \dfrac{1}{2}(M + {}^tM) \\ A = \dfrac{1}{2}(M - {}^tM) \end{cases}$$
2. Synthèse :
   Soit M une matrice carrée. Soit $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ alors
   (a) $M = S + A$
   (b) ${}^tS =^t (\frac{1}{2}(M + {}^tM)) = \frac{1}{2}^t(M + {}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM + M) = S$
   donc S est symétrique.
   (c) ${}^tA =^t (\frac{1}{2}(M - {}^tM)) = \frac{1}{2}^t(M - {}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM - {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -A$
   donc A est antisymétrique.
3. Exemple :

Soit $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ alors ${}^tM = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} S = \dfrac{1}{2}(M + {}^tM) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ est symétrique} \\ A = \dfrac{1}{2}(M - {}^tM) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est antisymétrique} \\ S + A = M \end{cases}$$

That' All Folks !!!

10 Exercices

10.1 Exercice

1. Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui
   (a) saisit au clavier les termes de deux matrices A et B de format (n, p)
   (b) détermine puis affiche la matrice $A + B$
2. Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui
   (a) saisit au clavier les termes de deux matrices A et B de format respectif (n, p) et (p, q)
   (b) détermine puis affiche la matrice AB

10.1.1 programme Turbo-Pascal d'addition de 2 matrices

```
program additiondematrices;
 uses wincrt;
 const nmax=100;pmax=100;
 type matrice = array[1..nmax,1..pmax] of integer;
 var A,B : matrice;
      n,i : 1..nmax;
      p,j : 1..pmax;
 begin
  clrscr;
(* entrée des données *)
write('Veuillez taper au clavier le nombre de lignes n =');
readln(n);
write('Veuillez taper au clavier le nombre de colonnes p =');
readln(p);
writeln('Veuillez taper les ', n*p, ' termes de la matrice A ');
for i := 1 to n do
  begin
    for j := 1 to p do
                      begin
                         read(A[i,j]);
                      end;
    writeln;
   end;
writeln('Veuillez taper les ', n*p, ' termes de la matrice B ');
  for i := 1 to n do
        begin
         for j := 1 to p do
                            begin
                                read(B[i,j]);
                            end;
         writeln;
        end;
(* Traitement et sortie des résultats *)
```

```
writeln('Voici la matrice A + B ');
for i := 1 to n do
  begin
      for j := 1 to p do
            begin
                     write(A[i,j] + B[i,j], ' ' );
            end;
     writeln;
   end;
end.
```

10.1.2 programme Turbo-Pascal produit de 2 matrices

```
program produitdematrices;
 uses wincrt;
 const nmax=100;pmax=100;qmax=100;
 type matricenp = array[1..nmax,1..pmax] of integer;
     matricepq =array[1..pmax,1..qmax] of integer;
     matricenq =array[1..nmax,1..qmax] of integer;
 var A : matricenp;
     B : matricepq;
     C : matricenq;
      n,i : 1..nmax;
      p,j : 1..pmax;
      q,k : 1..qmax;
 begin
  clrscr;
(* entrée des données *)
write('le nombre de colonnes de  A doit être égal au nombre de lignes  de  B');
write('Veuillez taper au clavier le nombre de lignes de la matrice A , n =');
readln(n);
write('Veuillez taper au clavier le nombre de colonnes de la matrice A, p =');
readln(p);
write('veuillez taper au clavier le nombre de colonnes de la matrice B, q =');
readln(q);
writeln('Veuillez taper les ', n*p, ' termes de la matrice A ');
for i := 1 to n do
  begin
    for j := 1 to p do
                      begin
                         read(A[i,j]);
                      end;
    writeln;
   end;
writeln('Veuillez taper les ', p*q, ' termes de la matrice B ');
  for j := 1 to p do
        begin
         for k := 1 to q do
                            begin
```

```
                                read(B[j,k]);
                            end;
         writeln;
        end;
(* Traitement et sortie des résultats *)
writeln('Voici la matrice C = A B ');
for i := 1 to n do
  begin
      for k := 1 to q do
            begin
                  C[i,k] :=0;
                  for j =1 to p do
                       begin
                     C[i,k]:=C[i,k] + A[i,j]B[j,k]
            end;
            write(C[i,k],' ');
     writeln;
   end;
end.
```

10.2 Exercice

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, déterminer l'inversibilité éventuelle de la matrice A et en cas de réponse positive, déterminer A^{-1}

1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

10.2.1 Corrigé

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ L_1 \leftrightarrow L_2 \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ L_2 \leftarrow L_2 - L1 \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ L_3 \leftarrow L_3 - L2 \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ L_3 \leftarrow \frac{1}{(2} L_3 \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi I donc la matrice A est inversible.
Le processus utilisé plus haut sur la matrice A avec les règles R_1, R_2, R_3 sera appliqué à la matrice identité I qui va se transformer en A^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L1 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L2 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ \begin{array}{l} L_3 \leftarrow \frac{1}{(2} L_3 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ \; L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \right.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

alors

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Illustration sous Maple :

```
restart; with(linalg);
A1 := matrix([[1, 1, 0], [1, 0, 1], [0, 1, 1]]); det(A1); B1 := diag(1$3);
A2 := swaprow(A1, 1, 2); B2 := swaprow(B1, 1, 2);
A3 := addrow(A2, 1, 2, -1); B3 := addrow(B2, 1, 2, -1);
A4 := addrow(A3, 2, 3, -1); B4 := addrow(B3, 2, 3, -1);
A5 := mulrow(A4, 3, 1/2); B5 := mulrow(B4, 3, 1/2);
A6 := addrow(A5, 3, 2, 1); B6 := addrow(B5, 3, 2, 1);
A7 := addrow(A6, 3, 1, -1); B7 := addrow(B6, 3, 1, -1);
evalm(inverse(A1));
```

10.2.2 Corrigé

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ \; L_1 \leftrightarrow L_2 \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ \; L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ \; L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_1 \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ \; L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2 \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme il n'y a pas trois pivots A ne sera pas inversible et A^{-1} n'existera pas.
Illustration sous Maple :

```
restart; with(linalg);
A1 := matrix([[1, 1, 2], [1, 0, 2], [2, 1, 4]]); det(A1);
A2 := swaprow(A1, 1, 2);
A3 := addrow(A2, 1, 2, -1);
A4 := addrow(A3, 1, 3, -2);
A5 := addrow(A4, 2, 3, -1);
evalm(inverse(A1));
```

10.3 Exercice

Soit A une matrice nilpotente c'est-à-dire une matrice carrée d'ordre n telle qu'il existe un enitier naturel p non nul tel que $A^P = O$

1. Exprimer de deux façons diférentes $A^p - I$.
2. En déduire que $A - I$ est inversible et déterminer son inverse $(A - I)^{-1}$

10.3.1 Corrigé

1. (a) Comme $A^p = O$ alors $A^p - I = -I$.

   (b) $A^p - I = A^p - I^p$
   $= (A - I)(A^{p-1} + A^{p-2}I + A^{p-3}I^2 + \cdots + A^2I^{p-3} + AI^{p-2} + I^{p-1})$
   Or $\forall k \in \mathbb{N}$ $I^k = I$ et pour toute matrice M on a $MI = I$ donc $A^p - I = (A - I)(A^{p-1} + A^{p-2} + A^{p-3} + \cdots + A^2 + A + I)$
2. Par conséquent, $-I = (A - I)(A^{p-1} + A^{p-2} + A^{p-3} + \cdots + A^2 + A + I)$ donc $A - I$ est inversible et
   $$(A - I)^{-1} = -A^{p-1} - A^{p-2} - A^{p-3} - \cdots - A^2 - A - I = -\sum_{k=0}^{p-1} A^k$$

10.4 Exercice

Soient A et B des matrices telles que $A + B = AB$. Démontrer que $I - A$ est inversible et déterminer son inverse $(I - A)^{-1}$

10.4.1 Corrigé

Comme $A + B = AB$ alors $A + B + I = AB + I$ donc $I = AB + I - A - B$.
On en conclut que $I = (I - A)(I - B)$ car $I^2 = I$ et $IA = A$ et $IB = B$
Par conséquent, la matrice $I - A$ est inversible et son inverse $(I - A)^{-1}$ est $I - B$

10.5 Exercice

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Exprimer A^2 en fonction de A et de I
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}

10.5.1 Corrigé

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Alors
$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & -4 \\ 6 & 10 & 6 \\ -2 & 2 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 6 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$
donc $A^2 = 8I + 2A$
2. Par conséquent $8I = A^2 - 2A = AA - 2AI = A(A - 2I)$ donc $I = \dfrac{1}{8}A(A-2I) = A(\dfrac{1}{8}(A-2I))$
donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{8}(A - 2I) =$
$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{-1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

10.6 Exercice

1. Soit
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Déterminer l'expression de J^n en fonction de n.
2. Exprimer alors A^n sachant que
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

10.6.1 Corrigé

1. Soit
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
alors
$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Par conséquent $J^2 = I$ et on démontre aisément par récurrence que $\forall n \geq 2$ on a $J^n = I$ si n pair et $J^n = J$ si n impair
2. item Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$$
donc
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a}{n} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
donc $A = I + \frac{a}{n}J$. On peut alors appliquer la formule du binôme de Newton car les matrices I et $\frac{a}{n}J$ sont commutables puisque $I(\frac{a}{n}J) = \frac{a}{n}(IJ) = \frac{a}{n}J = (\frac{a}{n}J)I$
Par conséquent $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k}(\frac{a}{n}J)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\frac{a}{n})^k J^k$
$= I + n\frac{a}{n}J + \frac{n(n-1)}{2}(\frac{a}{n})^2 I + \binom{n}{3} (\frac{a}{n})^3 J + \cdots + (\frac{a}{n})^n J^n$
$= I + aJ + \frac{n(n-1)}{2}(\frac{a}{n})^2 I + \binom{n}{3} (\frac{a}{n})^3 J + \cdots + (\frac{a}{n})^n J^n$

10.7 Exercice

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, A^3, A^4, A^5 et A^6
2. Déterminer l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
3. La suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a-t-elle une limite quand $n \mapsto +\infty$?

10.7.1 Corrigé

1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

alors

(a)

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

(b)

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

donc $A^3 = \frac{-1}{2} A$

(c)

$$A^4 = AA^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \frac{-1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{-1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

donc $A^4 = \frac{-1}{2} A^2$

(d)

$$A^5 = AA^4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{-1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{-1}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

donc $A^5 = \frac{1}{4}A$

(e)

$$A^6 = AA^5 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{16} & 0 & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{-1}{8} & 0 \\ \frac{1}{16} & 0 & \frac{-1}{16} \end{pmatrix}$$

donc $A^6 = \frac{1}{4}A^2$

2. On démontre par récurrence que

(a) si $n = 2p$ alors

$$A^n = A^{2p} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} & 0 & \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} \\ 0 & \frac{(-1)^p}{2^p} & 0 \\ \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} & 0 & \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} \end{pmatrix}$$

donc $A^{2p} = (\frac{-1}{2})^{p-1}A^2$

(b) si $n = 2p+1$ alors

$$A^n = A^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} & 0 \\ \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} & 0 & \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} \\ 0 & \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} & 0 \end{pmatrix}$$

donc $A^{2p+1} = (\frac{-1}{2})^p A$

3. Comme $-1 < \frac{-1}{2} < 1$ alors $\lim_{p \mapsto +\infty} (\frac{-1}{2})^{p-1} = 0$ donc $\lim_{n \mapsto +\infty} A^n = O$

10.8 Exercice

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

10.8.1 Corrigé

Méthode 1
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

1. $$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
   donc $A^2 = A + 2I$
2. $A^3 = A^2A = (A+2I)A = A^2 + 2IA = A^2 + 2A = A + 2I + 2A = 3A + 2I$
3. $A^4 = A^3A = (3A+2I)A = 3A^2 + 2IA = 3A^2 + 2A = 3(A+2I) + 2A = 5A + 6I$
4. $A^0 = I = 0A + 1I$
5. $A^1 = A = 1A + 0I$

Posons $A^n = a_nA + b_nI$
alors $a_{n+1}A + b_{n+1}I = A^{n+1} = A^nA = (a_nA + b_nI)A$
$= a_nA^2 + b_nA = a_n(a+2I) + b_nA = (a_n + b_n)A + 2a_nI$ donc

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}$$

donc $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$. On est donc en présence d'une suite définie par une récurrence linéaire double.
Son équation caractéristique est : $q^2 - q - 2 = 0$ de solutions $q_1 = -1$ et $q_2 = 2$.
Par conséquent, $a_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$ où α et β vérifient

$$\begin{cases} 0 = a_0 = \alpha 2^0 + \beta(-1)^0 \\ 1 = a_1 = \alpha 2^1 + \beta(-1)^1 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta \\ 1 = 2\alpha - \beta \end{cases}$$

donc $\alpha = \dfrac{1}{3}$ et $\beta = \dfrac{-1}{3}$ d'où

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{3}2^n - \dfrac{1}{3}(-1)^n \\ b_n = 2a_{n-1} = 2(\dfrac{1}{3}2^{n-1} - \dfrac{1}{3}(-1)^{n-1}) \end{cases}$$

Comme $A^n = a_n A + b_n I$ on obtient donc

$$\boxed{A^n = \frac{1}{3}(2^n + (-1)^{n+1})A + \frac{2}{3}(2^{n-1} + (-1)^n)I}$$

qu'il faut ensuite prouver par récurrence.
Méthode 2
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B - I$$

Or

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3B$$

donc $B^3 = B^2 B = 3BB = 9B$. De même $B^4 = B^3 B = 9BB = 27B$.
On démontre par récurrence que $\forall n \in N^*$ on a $B^n = 3^{n-1}B$
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $A^n = (B - I)^n$ On peut appliquer alors la formule du binôme de Newton car $(-B)I = I(-B) = -B$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} I^{n-k} B^k$
$= \binom{n}{0} (-1)^n I^n B^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} B^k = (-1)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^{k-1} B$
$= (-1)^n I + \frac{1}{3} B (\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^k)$
$= (-1)^n I + \frac{1}{3} B (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^k - (-1)^n \binom{n}{0} 3^0 = (-1)^n I + \frac{1}{3} B (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^k + (-1)^{n+1})$
$= (-1)^n I + (-1)^{n+1} \frac{1}{3} B + \frac{1}{3} B (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^k) = (-1)^n I + (-1)^{n+1} \frac{1}{3} B + \frac{1}{3} B (3-1)^n$
$= (-1)^n I + \frac{1}{3} B ((-1)^{n+1} + 2^n) = (-1)^n I + \frac{1}{3} (A + I)((-1)^{n+1} + 2^n)$
$= \frac{1}{3}(3(-1)^n + (-1)^{n+1} + 2^n) I + \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) A$

donc $\boxed{A^n = \frac{2}{3}((-1)^n + 2^{n-1}) I + \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) A}$

10.9 Exercice

Soit
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$
Déterminer l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

10.9.1 Corrigé

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = aI + bJ$$

avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Or $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
On démontre alors par récurrence que $\forall n \geq 2$ l'on a $J^n = 0$.
Comme $(aI)(bJ) = ab(IJ) = abJ$ et $(bJ)(aI) = ba(JI) = baJ = abJ$ donc $(aI)(bJ) = (bJ)(aI)$, on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :
$\forall n \in \mathbb{N}$ $A^n = (aI + bJ)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} I^{n-k} b^k J^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^{n-k} I^{n-k} b^k J^k$ car $\forall n \geq 2$ l'on a $J^n = 0$.
Donc $A^n = \binom{n}{0} a^n I^n b^0 J^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} I^{n-1} b^1 J^1 = a^n I + na^{n-1} bJ$
$= a^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + na^{n-1} b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} a^n & nba^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}}$

10.10 Exercice

Soit
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$
Déterminer l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

10.10.1 Corrigé

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = aI + bJ$$

avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Or $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
On démontre alors par récurrence que $\forall n$ pair l'on a $J^n = I$ et $\forall n$ impair l'on a $J^n = J$
Comme $IJ = J = JI$, on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :
$\forall n \in \mathbb{N}$ $A^n = (aI + bJ)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} I^{n-k} b^k J^k$
$\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{A^n = \sum_{k\ pair} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k I + \sum_{k\ impair} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k J}$

10.11 Exercice

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

10.11.1 Corrigé

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I + J$$

Or $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc

$J^3 = JJ^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On démontre alors par récurrence que $\forall n \geq 3$ l'on a $J^n = O$

Comme $IJ = J = JI$, on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$\forall n \in \mathbb{N}\ A^n = (I+J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} J^k = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} IJ^k$

Donc $A^n = \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 + \binom{n}{2} J^2 = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2$ Donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

10.12 Exercice

On considère les deux suites de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs deux premiers termes respectifs u_0 et v_0 et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{array} \right.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

2. Montrer que l'on peut écrire $A = 5I + J$ où I désigne la matrice unité et J une matrice que l'on déterminera.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$
4. En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n, de u_0 et de v_0

10.12.1 Corrigé

10.13 Exercice EMLyon 02

On considère les deux matrices carrées d'ordre 4 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer K^2
   (b) En déduire que la matrice K est inversible et déterminer K^{-1}
2. Soient a et b des nombres réels. Soit la matrice $M = aI + bK$
   (a) Montrer que $M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM$
   (b) En déduire que si $(a, b) \neq (0, 0)$ alors la matrice M est inversible et exprimer son inverse M^{-1} comme combinaison linéaire de I et de M.
   (c) Application : déterminer l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

10.13.1 Corrigé

On considère les deux matrices carrées d'ordre 4 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. (a) $K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
   (b) $K^2 = -I$ donc $K(-K) = I$. On en déduit que la matrice K est inversible et $K^{-1} = -K$
2. Soient a et b des nombres réels. Soit la matrice $M = aI + bK$
   (a) $M^2 = (aI + bK)^2 = (aI + bK)(aI + bK)$
   $= (aI)(aI) + (aI)(bK) + (bK)(aI) + (bK)(bK) = a^2I^2 + abIK + baKI + b^2K^2$
   $= a^2I + abK + baK - b^2I$ car $I^2 = I$ et $KI = K = IK$
   $= a^2I - b^2I + 2abK = a^2I - b^2I + 2a(M - aI)$ car $bK = M - aI$
   $= a^2I - b^2I + 2aM - 2a^2I = -(a^2 + b^2)I + 2aM$
   (b) Comme $M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM$ alors $M^2 - 2aM = -(a^2 + b^2)I$ donc $M(M - 2aI) = -(a^2 + b^2)I$
   Comme $(a, b) \neq (0, 0)$ on a $\dfrac{1}{-a^2 - b^2} M(M - 2aI) = I$
   donc $M(\dfrac{1}{-a^2 - b^2}(M - 2aI)) = I$.

On en déduit que la matrice M est inversible et

son inverse $M^{-1} = \dfrac{1}{-a^2 - b^2}(M - 2aI)$

(c) Application :

la matrice $M = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}I + K$

Ici $a = \sqrt{2}$ et $b = 1$.

Comme $(a, b) \neq (0, 0)$ on a M est inversible et son inverse

$M^{-1} = \dfrac{1}{-a^2 - b^2}(M - 2aI) = \dfrac{1}{-3}(M - 2\sqrt{2}I) = \dfrac{1}{3}(2\sqrt{2}I - M)$

$M^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2}-1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & \sqrt{2}-1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

10.14 Résolution de systèmes linéaires

10.14.1

Résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Pour résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Il y a les méthodes classiques (substitution, combinaison linéaire, pivot de gauss,...) que vous connaissez dèjà.
Parmi toutes ces méthodes , vous devez maîtriser celle du pivot de Gauss en n'utilisant à chaque fois qu'une seule des 3 règles R_1, R_2, R_3 suivantes :

1. $L_i \leftrightarrow L_j$
2. $L_i \leftarrow \lambda L_i$
3. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

$$\Sigma \begin{cases} x + y + z = 1 \quad L_1 \\ -x + y + z = 0 \quad L_2 \\ 2x - y + z = 1 \quad L_3 \end{cases}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \end{cases}$$

$$\Sigma \begin{cases} x + y + z = 1 \quad L_1 \\ 0 + 2y + 2z = 1 \quad L_2 \\ 2x - y + z = 1 \quad L_3 \end{cases}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$\Sigma \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 + 2y + 2z = 1 \\ 0 - 3y - z = -1 \end{cases}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \dfrac{3}{2} L_2 \end{cases}$$

$\Sigma \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 0+2y+2z=1 \\ 0+0+2z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow \dfrac{1}{2}L_3 \end{cases}$$

$\Sigma \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 0+2y+2z=1 \\ 0+0+z=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \leftarrow L2-2L_3 \\ L_3 \end{cases}$$

$\Sigma \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 0+2y+0=\dfrac{1}{2} \\ \\ 0+0+z=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \leftarrow \dfrac{1}{2}L2 \\ L_3 \end{cases}$$

$\Sigma \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 0+y+0=\dfrac{1}{4} \\ \\ 0+0+z=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1-L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{cases}$$

$\Sigma \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} x+0+z=\dfrac{3}{4} \\ \\ 0+y+0=\dfrac{1}{4} \\ \\ 0+0+z=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{cases}$$

$\Sigma \iff$

$$\begin{cases} 1x + 0 + 0 = \dfrac{2}{4} \\ \\ 0 + 1y + 0 = \dfrac{1}{4} \\ \\ 0 + 0 + 1z = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

On a réussi à créer 3 pivots. Le système a une solution unique $\Sigma \iff$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ \\ y = \dfrac{1}{4} \\ \\ z = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

En conclusion $S = \{(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4})\}$

Méthode matricielle.

Une nouvelle méthode consiste à utiliser les matrices.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

$\iff$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\iff AX = B \iff X = A^{-1}B$ sous réserve d'inversibilité de la matrice A

Reste à déterminer si A est inversible et quelle est alors A^{-1} ?

Le processus utilisé plus haut sur le système donc sur la matrice A avec les règles R_1, R_2, R_3 sera appliqué à la matrice identité I qui va se transformer en A^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \dfrac{3}{2}L_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \dfrac{-1}{2} & \dfrac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow \dfrac{1}{2}L_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \dfrac{-1}{4} & \dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \leftarrow L2 - 2L_3 \\ L_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{3}{2} & \dfrac{-1}{2} & 1 \\ \\ \dfrac{-1}{4} & \dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \leftarrow L2 - 2L_3 \\ L_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{3}{4} & \dfrac{-1}{4} & \dfrac{-1}{2} \\ \\ \dfrac{-1}{4} & \dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \leftarrow \dfrac{1}{2}L2 \\ L_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{4} & \dfrac{-1}{4} & \dfrac{-1}{2} \\ \dfrac{-1}{4} & \dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{-1}{2} & 0 \\ \dfrac{3}{4} & \dfrac{-1}{4} & \dfrac{-1}{2} \\ \dfrac{-1}{4} & \dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Illustration sous Maple :

```
restart; with(linalg);
A1 := matrix([[1, 1, 1], [-1, 1, 1], [2, -1, 1]]); det(A1); B1 := diag(1$3);
A2 := addrow(A1, 1, 2, 1); B2 := addrow(B1, 1, 2, 1);
A3 := addrow(A2, 1, 3, -2); B3 := addrow(B2, 1, 3, -2);
A4 := addrow(A3, 2, 3, 3/2); B4 := addrow(B3, 2, 3, 3/2);
A5 := mulrow(A4, 3, 1/2); B5 := mulrow(B4, 3, 1/2);
A6 := addrow(A5, 3, 2, -2); B6 := addrow(B5, 3, 2, -2);
A7 := mulrow(A6, 2, 1/2); B7 := mulrow(B6, 2, 1/2)
A8 := addrow(A7, 2, 1, -1); B8 := addrow(B7, 2, 1, -1);
A9 := addrow(A8, 3, 1, -1); B9 := addrow(B8, 3, 1, -1)
evalm(inverse(A1));
```

On en déduit que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{-1}{2} & 0 \\ \dfrac{3}{4} & \dfrac{-1}{4} & \dfrac{-1}{2} \\ \dfrac{-1}{4} & \dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

10.14.2

Résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\Sigma \begin{cases} y + z = 1 \quad L_1 \\ x + 2y + 2z = 1 \quad L_2 \\ -x + y + z = 2 \quad L_3 \end{cases}$$

$$\Sigma \begin{cases} y + z = 1 \quad L_1 \\ x + 2y + 2z = 1 \quad L_2 \\ -x + y + z = 2 \quad L_3 \end{cases}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ L_1 \leftrightarrow L2 \right.$$

$$\Sigma \begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ y + z = 1 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \right.$$

$\Sigma \iff$

$$\Sigma \begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 0x + y + z = 1 \\ 0x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \right.$$

$\Sigma \iff$

$$\Sigma \begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 0x + y + z = 1 \\ 0x + y + z = 1 \end{cases}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \right.$$

$\Sigma \iff$

$$\begin{cases} 1x + 2y + 2z = 1 \\ 0x + 1y + z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Il n'y a pas de 3ème pivot donc on n'aboutira pas à une solution unique
$\Sigma \iff$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - z \\ \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En conclusion $S = \{(-1; 1 - z; z)/z \in \mathbb{R}\}$ contient une infinité de solutions.
Méthode matricielle

$$\Sigma : \begin{cases} y + z = 1 \quad L_1 \\ x + 2y + 2z = 1 \quad L_2 \\ -x + y + z = 2 \quad L_3 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow AX = B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B$ sous réserve d'inversibilité de la matrice A
Reste à déterminer si A est inversible et quelle est alors A^{-1} ?
Le processus utilisé plus haut sur le système donc sur la matrice A avec les règles R_1, R_2, R_3 sera appliqué à la matrice identité I mais comme il n'y a pas trois pivots A ne sera pas inversible et A^{-1} n'existera pas.
Illustration Maple :

```
restart; with(linalg);
A1 := matrix([[0, 1, 1], [1, 2, 2], [-1, 1, 1]]); det(A1); B1 := diag(1$3));
A2 := swaprow(A1, 1, 2); B2 := swaprow(B1, 1, 2);
A3 := addrow(A2, 1, 3, 1); B3 := addrow(B2, 1, 3, 1);
A4 := mulrow(A3, 3, 1/3); B4 := mulrow(B3, 3, 1/3);
A5 := addrow(A4, 2, 3, -1); B5 := addrow(B4, 2, 3, -1);
evalm(inverse(A1));
```

10.14.3

Résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\Sigma : \begin{cases} y = 2 \quad L_1 \\ x - y - 2z = -2 \quad L_2 \\ 2x + 3y - 4z = 1 \quad L_3 \end{cases}$$

$$\Sigma : \begin{cases} y = 2 \quad L_1 \\ x - y - 2z = -2 \quad L_2 \\ 2x + 3y - 4z = 1 \quad L_3 \end{cases}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_1 \leftrightarrow L3 \end{cases}$$

$$\Sigma \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ x - y - 2z = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_2 \leftrightarrow L3 \end{cases}$$

$$\Sigma \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 0x + 1y + 0z = 2 \\ 1x - 1y - 2z = -2 \end{cases}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_3 \leftarrow L3 - \dfrac{1}{2}L_1 \end{cases}$$

$$\Sigma \iff \begin{cases} 2x+3y-4z=1 \\ 0x+1y+0z=2 \\ 0x-2y+0z=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Ce système est impossible à résoudre car il équivaut à

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=1 \\ y=2 \\ y=5 \end{cases}$$

Par conséquent $S=\{\}=\emptyset$ **Méthode matricielle.**

$$\Sigma : \begin{cases} y=2 \\ x-y-2z=-2 \\ 2x+3y-4z=1 \end{cases}$$

$\iff$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\iff AX=B \iff X=A^{-1}B$ sous réserve d'inversibilité de la matrice A
Reste à déterminer si A est inversible et quelle est alors A^{-1} ?
Le processus utilisé plus haut sur le système donc sur la matrice A avec les règles R_1, R_2, R_3 sera appliqué à la matrice identité I mais comme il n'y a pas trois pivots A ne sera pas inversible et A^{-1} n'existera pas.

10.14.4

> Résoudre le système d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:
>
> $$\Sigma : \begin{cases} x+y-2z=1 & L_1 \\ x-2y+z=4 & L_2 \end{cases}$$

$$\Sigma : \begin{cases} x+y-2z=1 & L_1 \\ x-2y+z=4 & L_2 \end{cases}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_2 \leftarrow L2-L1 \end{cases}$$

$$\Sigma \iff \begin{cases} x+y-2z=1 \\ 0x-3y+3z=3 \end{cases}$$

en utilisant les changements

$$\begin{cases} L_2 \leftarrow \dfrac{1}{3}L2 \end{cases}$$

$$\Sigma \iff \begin{cases} x+y-2z=1 \\ 0x-y+z=1 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ y=z-1 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

c'est-à -dire

$$\begin{cases} x=z+2 \\ y=z-1 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En conclusion $S = \{(z+2; z-1; z) / z \in \mathbb{R}\}$ contient une infinité de solutions. **Méthode matricielle.**

$$\Sigma : \begin{cases} x+y-2z=1 & L_1 \\ x-2y+z=4 & L_2 \end{cases}$$

$\iff$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff AX = B \iff X = A^{-1}B$ sous réserve d'inversibilité de la matrice A
Reste à déterminer si A est inversible et quelle est alors A^{-1} ?
Le processus utilisé plus haut sur le système donc sur la matrice A avec les règles R_1, R_2, R_3 sera appliqué à la matrice identité I mais comme il n'y a pas de solution unique alors A ne sera pas inversible et A^{-1} n'existera pas.

10.14.5

Résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, m étant un paramètre réel :

$$\Sigma : \begin{cases} x + y + mz = m \quad L_1 \\ x + my - z = 1 \quad L_2 \\ x + y - z = 1 \quad L_3 \end{cases}$$

$$\Sigma : \begin{cases} x + y + mz = m \quad L_1 \\ x + my - z = 1 \quad L_2 \\ x + y - z = 1 \quad L_3 \end{cases}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ \; L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \right.$$

$$\Sigma \iff \begin{cases} x + y + mz = m \\ 0x + (m-1)y + 0z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

en utilisant les changements

$$\left\{ \; L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \right.$$

$$\Sigma \iff \begin{cases} x + y + mz = m \\ (m-1)y = 0 \\ -z(1+m) = 1 - m \end{cases}$$

On est alors obligé de discuter :

1. ou bien $m \neq 1$ et $m \neq -1$
   Alors
   $$\Sigma \iff \begin{cases} x + y + mz = m \\ y = 0 \\ z = \dfrac{m-1}{m+1} \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} x = m - m\dfrac{m-1}{m+1} = \dfrac{2m}{m+1} \\ y = 0 \\ z = \dfrac{m-1}{m+1} \end{cases}$$
   donc $S = \{(\dfrac{2m}{m+1}; 0; \dfrac{m-1}{m+1})\}$
2. ou bien $m = -1$
   Alors
   $$\Sigma \iff \begin{cases} x + y - z = -1 \\ y = 0 \\ 0z = 2 \end{cases}$$
   donc $S = \{\} = \emptyset$

3. ou bien $m = 1$
   Alors
$$\Sigma \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
   donc $S = \{(1 - y, y, 0)/y \in \mathbb{R}\} = \emptyset$

10.15

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^2 et M^3.
2. Montrer que $M^3 + 2M^2 - M - 2I = 0$
3. En déduire que M est inversible.

10.15.1 Corrigé

10.16 Lemme de Hadamard

On dit qu'une matrice carrée $A = (a_{ij})$ est à diagonale strictement dominante lorsque

$$\forall i \in [|1;n|] \quad |a_{ii}| > \sum_{j=1;j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Il s'agit de démontrer que toute matrice carrée à diagonale strictement dominante est inversible. Soit $X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in Ker(A)$ et $M = max\{|x_i|/i = 1, 2, \cdots, n\}$

1. Exprimer $a_{ii}x_i$ en fonction des a_{ij} où $j \neq i$.
2. Majorer alors $|a_{ii}M|$ par une somme S faisant intervenir les $|a_{ij}|$ où $j \neq i$
3. Majorer S grâce à $|a_{ii}|M$
4. Que vaut alors M ? Quelles sont les valeurs des x_i ?
5. Conclure.

10.16.1 Corrigé

Soit $X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in Ker(A)$.

Soit $M = max\{|x_i|/i = 1, 2, \cdots, n\}$

1. Comme $AX = O$ alors $\forall i \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$ donc $a_{ii}x_i = -\sum_{j=1;j\neq i}^{n} a_{ij}x_j$
2. Comme $a_{ii}x_i = -\sum_{j=1;j\neq i}^{n} a_{ij}x_j$ alors $|a_{ii}||x_i| = |a_{ii}x_i| = |\sum_{j=1;j\neq i}^{n} a_{ij}x_j| \leq \sum_{j=1;j\neq i}^{n} |a_{ij}x_j|$.

   Notons $S = \sum_{j=1;j\neq i}^{n} |a_{ij}x_j|$.

   De plus, comme $\forall i \quad |x_i| \leq M$ alors $|a_{ii}|M \leq S$

3. Comme $\forall j \quad |x_j| \leq M$ alors $S = \sum_{j=1;j\neq i}^{n} |a_{ij}x_j| = \sum_{j=1;j\neq i}^{n} |a_{ij}||x_j| \leq \sum_{j=1;j\neq i}^{n} |a_{ij}|M$
   Par conséquent, $S \leq M \sum_{j=1;j\neq i}^{n} |a_{ij}|$. Or $|a_{ii}| > \sum_{j=1;j\neq i}^{n} |a_{ij}|$
   donc $S \leq M|a_{ii}|$. Cette inégalité est stricte si $M \neq 0$
4. Comme $|a_{ii}|M \leq S$ et $S \leq M|a_{ii}|$ alors $S = M|a_{ii}|$
   Donc $M = 0$. Par conséquent $\forall i \quad |x_i| = 0$ donc $\forall i \quad x_i = 0$ donc $X = O$
5. L'endomorphisme associé à A est donc injectif en dimension finie donc bijectif donc A est inversible.