Généralités sur les probabilités

Christian CYRILLE

29 août 2016

1 Un brin d'histoire

Le mot HASARD (12ème siècle) vient du mot arabe az-zahr qui veut dire jeu de dés.Un "hasart" représentait le nombre 6 obtenu à partir du jet d'un dé.
ALEA vient du latin alea : coup de dés. "Alea jacta est : le sort en est jeté " dixit Jules César d'après Suétone quand il a franchi le Rubicon pour s'emparer du pouvoir à Rome. CHANCE vient du latin caderer qui veut dire choir , chuter (chute des dés). RANDOM veut dire hasard en anglais. En créole, DE se dit "zo" (os en français) car les 1ers dés étaient faits en os
La théorie des probabilités s'est initialement développée au début du 15è siècle , sur la base de l'expérience et de raisonnements intuitifs, appliqués la plupart du temps , à l'analyse de chances dans les jeux de dés ou les pile ou face. Les fondations mathématiques proprement dites sont nettement plus modernes. La formalisation de la théorie des probabilités sous une forme axiomatique va être mise au point par un des mathématiciens les plus importants du XXème siècle Andreï KOLMOGOROV(1903-1987) dans un article en allemand de 1933, Grundbegriffe der Warscheinligkeitsrechnung, (Les fondements du calcul des probabilités). Il développe notable-

ment cette même théorie, s'intéressant en particulier aux processus de Markov (nommés d'après Andreï Markov, 1856-1922).
Kolmogorov définit une probabilité dans un ensemble au moyen d'axiomes simples mais faisant usage des concepts récents de l'époque : théorie de la mesure et tribus (définies par Borel), calcul intégral au sens de Lebesgue (intervenant par exemple dans le calcul des espérance mathématique et variance d'une variable aléatoire. Avec Kolmogorov, le calcul des probabilités, jusqu'ici basé sur des concepts intuitifs, devient une branche rigoureuse des mathématiques.

2 Langage probabiliste

Définitions	**Exemples**
Lorsqu'on lance un dé, une pièce, ... on effectue ce que l'on appelle une expérience aléatoire.	On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 On s'intéresse au numéro porté par la face supérieure.
L'ensemble des résultats possibles ou l'ensemble des éventualités ou l'ensemble des issues ou l'univers est noté Ω.	$\Omega = \{\cdots;\cdots;\cdots;\cdots;\cdots;\cdots\}$
Un événément A est une partie ou un sous ensemble de l'univers Ω. $A \subset \Omega$ Un événément élémentaire est un événement qui ne contient qu'une seule éventualité. C'est un singleton d'un élément de Ω. L'univers Ω est appelé l'événement certain. L'ensemble vide $\emptyset$ est appelé l'événement impossible.	On considère les événements suivant définis en compréhension : A : "obtenir un nombre pair" B : "obtenir un nombre multiple de 3" C : "obtenir le nombre 2" D :"obtenir un nombre multiple de 6" Définissons ces ensembles en extension : $A = \{\cdots;\cdots;\cdots\}$ $B = \{\cdots;\cdots\}$ $C = \{\cdots\}$ $D = \{\cdots\}$
L'événement contraire de A est la partie complémentaire On le note $\overline{A}$	$\overline{A}$: ".." $\overline{A}$: $\{\cdots;\cdots;\cdots\}$
L'événement $A \cap B$ est réalisé quand A et B le sont simultanément	$A \cap B = \{\cdots\}$
L'événement $A \cup B$ est réalisé quand A ou B l'est	$A \cup B = \{\cdots;\cdots\}$
Deux évenements sont dits incompatibles ou disjoints lorsque $A \cap B = \emptyset$	Donner 2 événements incompatibles pris parmi A, B et C

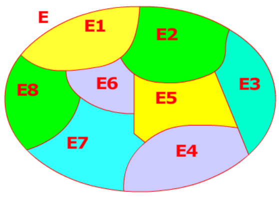
3 Système complet d'événements

3.1 Définition

Soit I un ensemble d'indices inclus dans $\mathbb{N}$, (I pourra être $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ ou une partie de $\mathbb{N}$,)
On appelle système complet d'événements de Ω, toute famille $(E_i)_{i \in I}$, **finie ou dénombrable** de sous-ensembles de Ω, vérifiant les 3 propriétés suivantes :

1. $\forall i \in I$ l'on a : $E_i \neq \emptyset$
2. les E_i sont disjoints 2 à 2 c'est-à-dire que $\forall i \in I, \forall j \in I$ et $i \neq j$ alors $E_i \cap Ej = \emptyset$
3. La réunion de tous les E_i est Ω c'est-à-dire $\bigcup\limits_{i \in I} E_i = \Omega$.

On dit encore que $(E_i)_{i \in I}$est une partition de Ω



3.2 Propriétés

1. La famille constituée de tous les événements élémentaires de Ω est un système complet d'événements de Ω
2. Si $(E_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements de Ω, alors
   $\forall B \subset \Omega$ l'on a : $\boxed{B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup\limits_{i \in I} E_i) = \bigcup\limits_{i \in I}(B \cap E_i)}$

3.3 Tribu ou σ-algèbre d'événements

3.3.1 définition

Soit Ω un ensemble fini.On appelle tribu de parties de Ω, tout sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui vérifie les 3 propriétés suivantes :

1. $P_1 : \mathcal{B} \neq \emptyset$
2. $P_2 : \forall A \in \mathcal{B}, \ , \forall B \in \mathcal{B}$, on a : $A \cup B \in \mathcal{B}$ (stabilité de $\mathcal{B}$ pour l'union)
3. $P_3 : \forall A \in \mathcal{B}$ l'on a : $\overline{A} \in \mathcal{B}$ (stabilité de $\mathcal{B}$ pour la complémentation)

3.3.2 Exemples

Exemple 1 :
$\boxed{\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega) \text{ est une tribu de parties de} \Omega}$
Démonstration :

- P_1 est vrai puisque $\mathcal{P}(\Omega) \neq \emptyset$ car $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$
- P_2 est vrai car $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$ l'on a : $A \cup B \in \mathcal{P}(\Omega)$

- P_3 est vrai car $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, l'on a $\overline{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$

Exemple 2 :

$\boxed{\mathcal{B} = \{\Omega;\emptyset\} \text{ est une tribu de parties de } \Omega}$

Démonstration :

- P_1 est vrai car $\mathcal{B} \neq \emptyset$
- P_2 est vrai car $\Omega \cup \Omega = \Omega \in B$; $\Omega \cup \emptyset = \Omega \in B$; $\emptyset \cup \Omega = \Omega \in B$; $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset \in B$
- P_3 est vrai car $\overline{\emptyset} = \Omega \in B$; $\overline{\Omega} = \emptyset \in B$

Exemple 3 :

Si $A \subset \Omega$ alors $\boxed{\mathcal{B} = \{\Omega\ ;\ A\ ;\ \overline{A};\ \emptyset\} \text{ est une tribu de parties de } \Omega}$.

On dit que c'est **la tribu engendrée par** A

3.3.3 Propriétés d'une tribu

Théorème 1 :

$\boxed{\text{Quel que soit la tribu } \mathcal{B}, \text{ on a } \Omega \in \mathcal{B}}$

Démonstration :

Comme $\mathcal{B}$ est une tribu alors $\mathcal{B} \neq \emptyset$ d'après P_1 donc $\mathcal{B}$ a au moins un élément A mais alors $\overline{A} \in \mathcal{B}$ d'après P_3. On en déduit d'après P_2 que : $A \cup \overline{A} \in \mathcal{B}$ c'est-à-dire $\Omega \in \mathcal{B}$ .CQFD

Théorème 2 :

$\boxed{\text{Quel que soit la tribu } \mathcal{B}, \text{ on a } \emptyset \in \mathcal{B}}$

Démonstration :

Comme $\mathcal{B}$ est une tribu alors d'après le théorème 1 on a $\Omega \in \mathcal{B}$ donc d'après P_3 on a = $\overline{\Omega} \in \mathcal{B}$ donc $\emptyset \in \mathcal{B}$ CQFD

Théorème 3 :

$\boxed{\text{Quel que soit la tribu } \mathcal{B}, \text{ on a } \forall A \in \mathcal{B},\ ,\forall B \in \mathcal{B}, A \cap B \in \mathcal{B}}$

Démonstration :

Comme $\mathcal{B}$ est une tribu alors si $A \in \mathcal{B}$ et $B \in \mathcal{B}$ alors $\overline{A} \in \mathcal{B}$ et $\overline{B} \in \mathcal{B}$ d'après P3.

Donc $\overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{B}$ d'après P2, donc son complémentaire $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathcal{B}$ d'après P_3, donc à nouveau en complémentant on a : $A \cap B \in \mathcal{B}$ d'après P_3 . CQFD

3.4 Définition d'une loi de probabilité

Dorénavant dans ce cours,

- la tribu $\mathcal{B}$ utilisée sera $\mathcal{P}(\Omega)$.
- Ω s'appellera l'univers ou l'ensemble des issues ou l'ensemble des résultats possibles ou l'ensemble des éventualités.
- Une partie A de Ω s'appellera un événement.
- La réunion de deux èvènements est un èvènement.
- $\overline{A}$ s'appelle l'événement contraire de l'événement A.
- Ω s'appelle aussi l'événement certain.
- $\emptyset$ s'appelle l'événement impossible.

- Le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ s'appelle un espace probabilisable.

On appelle loi de probabilité P sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application

$$P: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega): & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & P(A) \end{array}$$

vérifiant les 3 propriétés suivantes :

1. Prop 1 : $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad P(A) \geq 0$
2. Prop 2 : $\mathcal{P}(\Omega) = 1$
3. Prop 3 : (axiome des probabilités totales)
   $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

On dit alors que le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.

4 Exemples de lois de probabilité

4.1 Exemple 1

Soit Ω fini (on notera $Card(\Omega) = n$) Soit

$$P: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & P(A) = \sum\limits_{w_i \in A} P(\{w_i\}) \end{array}$$

En fait $P(A)$ = la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A.
Alors P est une loi de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Démonstration :

1. Pour tout A , $P(A)$ étant une somme de probabilités d'événements élémentaires donc une somme de nombres compris entre 0 et 1 donc est un réel positif
2. $P(\Omega)$ = la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans $\Omega = 1$
3. Pour tous événements A et B disjoints, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
   en effet, $P(A \cup B)$ = la somme des probabilités des événements élémentaires contenus dans $A \cup B$ = la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A + la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans $B = P(A) + P(B)$

4.2 Exemple 2

Dans le cas où tous les événements élémentaires sont équiprobables c'est-à-dire que $\forall i \in [| 1; n |] \quad P(\{wi\}) = \dfrac{1}{n}$
la loi de probabilité précédente se simplifie car
$P(A) = \sum\limits_{w_i \in A} P(\{w_i\}) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \cdots + \dfrac{1}{n} = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{\text{Nombre de cas favorables à A}}{\text{Nombre de cas possibles}}$ On dit alors que P est la loi de probabilité uniforme discrète sur Ω

4.3 Exemple 3

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
Soit A un événement de **probabilité non nulle**.
Alors l'application suivante notée

$$P_A : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$B \to P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

est une loi de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$
Notation : $P_A(B)$ s'écrit aussi $P(B/A)$ et se lit "Probabilité de B sachant que A est réalisé".
Démonstration :

1. Pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P_A(B)$ est un réel positif.
2. $P_A(\Omega) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$
3. Pour tous événements B et B' disjoints, $P_A(B \cup B') = P_A(B) + P_A(B')$
   en effet, $P_A(B \cup B') = \dfrac{P(A \cap (B \cup B'))}{P(A)} = \dfrac{P((A \cap B) \cup (A \cap B'))}{P(A)} = \dfrac{P(A \cap B) + P(A \cap B')}{P(A)}$
   car $(A \cap B) \cap (A \cap B') = A \cap (B \cap B') = A \cap \emptyset = \emptyset$
   d'où $P_A(B \cup B') = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} + \dfrac{P(A \cap B')}{P(A)} = P_A(B) + P_A(B')$

5 Propriétés d'une loi de probabilité

5.1 Propriété

$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad P(A) \geq 0$

5.2 Propriété

$P(\Omega) = 1$

5.3 Propriété

$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$ si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

5.4 Propriété

$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Démonstration :
$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$ car $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
Par conséquent, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

5.5 Propriété

> $P(\emptyset) = 0$

5.6 Propriété

> $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$ si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$

$B = A \cup (B - A)$ Or $A \cap (B - A) = \emptyset$ donc $P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P((B - A)$. Or $P(B - A) \geq 0$ donc $P(B) \geq P(A)$

5.7 Propriété

> $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad 0 \leq P(A) \leq 1$

5.8 Propriété

> $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \forall B \in \mathcal{P}(\Omega) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5.9 Formule d'Henri POINCARE, mathématicien français ,Nancy 1854-Paris 1912

> 1. $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
> 2. n= 4 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$

5.10 Systèmes complets d'événements

On appelle système complet d'événements de Ω, toute partition finie ou dénombrable de Ω c'est-à-dire toute famille finie ou dénombrable d'événements (E_i) vérifiant les 3 conditions suivantes :

- $\forall i \in I \quad E_i \neq \emptyset$
- $\forall i \in I \quad \forall j \in I \quad i \neq j \quad E_i \cap E_j = \emptyset$
- $\bigcup\limits_{i \in I} E_i = \Omega$

Alors pour tout événement B, on a $P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (\bigcup E_i)) = P(\bigcup (B \cap Ei)) = \sum\limits_{i \in I} P(B \cap Ei)$

car les $(B \cap E_i)$ sont disjoints 2 à 2 car les E_i le sont.

5.11 Suite croissante et suite décroissante d'événements

1. Si les A_i forment une suite croissante d'événements ($A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n \subset \cdots$)
   Alors $P(\bigcup A_i) = \lim\limits_{i \mapsto +\infty} P(A_i)$

2. Si les A_i forment une suite décroissante d'événements ($A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_{n-1} \supset A_n \supset \cdots$)
   Alors $P(\bigcap A_i) = \lim\limits_{i \mapsto +\infty} P(A_i)$

6 Exercices

Quelques conseils pour réussir à résoudre un exercice de probabilités

1. Illustrer la situation aléatoire par un schéma, un tableau, un arbre, un diagramme de Venn, un axe par exemple lors d'épreuves répétées.
2. Définir l'univers Ω, son cardinal $card(\Omega)$, l'équiprobabilité ou non des événements élémentaires
3. Dans le cas de variable aléatoire discrète X,
   définir $X < \Omega >$ l'univers -image même si on n'arrive pas à définir Ω
4. Pour calculer la probabilité d'un événement A, décrire cet événement comme union, intersection ou complémentaire :
   - Dans le cas d'une réunion d'événements :
     — si $A = B \cup C$ où $B \cap C \neq \emptyset$ alors
     $Pr(A) = Pr(B \cup C) = Pr(B) + Pr(C) - Pr(B \cap C)$
     — si $A = B \cup C$ où $B \cap C = \emptyset$ (B et C disjoints ou incompatibles) alors
     $Pr(A) = Pr(B \cup C) = Pr(B) + Pr(C)$
   - Dans le cas d'une intersection d'événements, penser à conditionner
     — N'oubliez pas que dans le cas où $Pr(B) \neq 0$ et $Pr(C) \neq 0$ alors
     $Pr(B \cap C) = Pr(B/C)Pr(C) = Pr(C/B)Pr(B)$
     — si B et C sont indépendants alors
     $Pr(B/C) = Pr(B)$ et $Pr(C) = Pr(C/B)$ donc $Pr(B \cap C) = Pr(B)Pr(C)$
     — Soient n événements ($n \geq 2$), $A_1, A_2, \cdots, A_n$ tels que $P(\bigcup A_i) \neq 0$
     alors $P(\bigcap A_i) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{n-1})$
   - si $A = \bar{B}$ (cela est intéressant dans les événements du type "au moins" ayant beaucoup de cas à traiter et lorsque l'événement contraire comporte peu de cas) alors $Pr(A) = 1 - Pr(B)$
5. Dans le cas de probabilités conditionnelles, bien repérer les systèmes complets d'événements. Utiliser un système complet d'événements pour obtenir une relation de récurrence entre les probabilités d'événements dépendant d'un indice en se servant de la formule des probabilités totales.
6. Quelques formules et astuces
   - $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
   - $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$; $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$
   - Les formules de Vandermonde :
     — si $N = N_1 + N_2$ alors $\binom{N}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k}$

— $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} (\binom{n}{k})^2$

- Les 3 formules de Pascal :
  — $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
  — $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$
  — Soit $n \in \mathbb{N}$ Soit $p \in [|\ 0; n\ |]$ alors l'on a :
  $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$
- Pour le calcul de $E(X)$ et de $E(X^2)$ dans la formule de Huyghens-Koenig :$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$:
  — $k = (k-1)+1$; $k = (k+1)-1$; $k^2 = k(k-1)+k$; $k^2 = k(k+1)-k$;
  — $\frac{k}{k!} = \frac{1}{k-1}$
  — $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$
- les séries géométriques : si $-1 < q < 1$ alors :
  — $\sum_{k=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$
  — $\sum_{k=0}^{+\infty} nq^n = \sum_{k=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$
  — $\sum_{k=0}^{+\infty} n^2q^n = \sum_{k=1}^{+\infty} n^2q^n = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}$
  — $\sum_{k=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \sum_{k=1}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \sum_{k=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$

Dans chacun des exercices suivants, il faudra :

1. Ecrire avec précision l'univers des possibles
2. L'illustrer si nécessaire par un schéma, un tableau, un arbre, ...
3. Préciser si les événements élémentaires sont équiprobables ou pas.

6.1 Urne

Une urne contient 3 boules : une noire, une rouge et une verte.

1. 1ère expérience : On tire une boule de l'urne et après avoir noté sa couleur, on la remet dans l'urne puis on tire une seconde boule dont on note aussi la couleur. Quel est l'ensemble des résultats possibles Ω ?
2. 2ème expérience : On tire simultanément deux boules et on note leur couleur. Quel est l'ensemble des résultats possibles Ω ?

6.2 Dé truqué

Un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est truqué de telle sorte que chaque face ait la même probabilité d'apparition sauf l'as qui sort 4 fois plus souvent.

1. Quel est l'ensemble des résultats possibles Ω ?
2. Déterminer les probabilités des événements élémentaires.
3. Déterminer la probabilité de l'événement suivant A : "le nombre sorti est au plus égal à 3"

6.3 Dé truqué

On considère un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. Ce dé est truqué de telle façon que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro porté sur cette face.
On admet que c'est le même coefficient de proportionnalité qui intervient pour chacune des faces.

1. Quel est l'ensemble des résultats possibles Ω ?
2. Déterminer les probabilités des événements élémentaires.
3. Déterminer la probabilité de l'événement suivant A : "le nombre sorti est pair"

6.4 Dé truqué - Bac Antilles -Guyane A78

On considère un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. Ce dé est truqué de telle façon que la probabilité d'obtenir 2 est égale à a où $a \in]0;1[$. Les probabilités des autres faces sont égales.

1. On lance ce dé 1 fois. Calculer en fonction de a les probabilités des événements suivants :
   - A : "obtenir un nombre pair"
   - B : "obtenir un nombre impair"
2. Déterminer a pour que P(A) = P(B)

6.5 Dé truqué

1 dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est truqué de la façon suivante : les faces impaires ont toutes la même probabilité d'apparition ; les faces paires ont toutes la même probabilité d'apparition ; la probabilité d'apparition d'une face paire quelconque est le triple d'une face impaire. Définir la loi de probabilité associée à un lancer unique du dé.

6.6 Feu tricolore

Le cycle d'allumage d'un feu tricolore est le suivant : 45″ vert - 5″ orange - 20″ rouge . En admettant qu'un automobiliste arrive par hasard devant l'une des 3 positions du feu, déterminer la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.

6.7 Boîtes

On dispose de 6 objets à répartir dans 3 boîtes. Déterminer la probabilité des 3 événements suivants :

- A : "la 1ère boîte ne contient aucun objet"
- B :"la 2ème boîte contient 2 objets exactement"
- C : "Chaque boîte contient 2 objets exactement"

6.8 Tiercé

Le PMU propose une course de 20 chevaux qui ont tous la même côte.

1. Un joueur joue un tiercé dans l'ordre. Quelle est sa probabilité de gain ?
2. Un joueur joue un tiercé dans le désordre. Quelle est sa probabilité de gain ?

6.9 Jetons

Un sac contient 20 jetons de formes et de couleurs différentes. On compte 5 jetons ronds, 8 jetons rouges et parmi eux 2 sont à la fois ronds et rouges. On tire au hasard un jeton du sac.

1. Quel est l'ensemble des résultats possibles Ω ?
2. Déterminer la probabilité de l'événement A : "le jeton tiré est rond"
3. Déterminer la probabilité de l'événement B : " le jeton tiré est rouge "
4. En déduire la probabilité pour que le jeton tiré soit rond ou rouge.
5. Quelle est la probabilité pour que le jeton tiré ne soit ni rond, ni rouge.

6.10 Pièces

On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.

1. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois pile.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois exactement pile.

6.11 Cartes

On tire simultanément et au hasard 2 cartes d'un jeu de 4 cartes comprenant un trèfle, un carreau, un cœur et un pique.
Quelle est la probabilité pour que les cartes tirées soient de la même couleur.

6.12 Dés

On lance simultanément 2 dés non truqués numérotés de 1 à 6 mais l'un est rouge et l'autre est bleu.

1. 1ère expérience : On lance les 2 dés. Quelle est la probabilité pour que le nombre marqué sur le dé bleu soit le double de celui marqué sur le dé rouge ?
2. 2ème expérience : On lance les 2 dés. Si la somme des points obtenus est strictement supérieur à 7 on gagne sinon on perd . Le jeu est-il favorable à celui qui lance ?
3. 3ème expérience : On lance les 2 dés. Si la valeur absolue de la différence des points obtenus est 1 ou 2 on gagne sinon on perd . Le jeu est-il favorable à celui qui lance ?

6.13 Le problème du Duc de Toscane

Voici le problème que le grand Duc de Toscane posa à GALILEE vers 1620. *"Comment parier sur la somme des points obtenus avec* 3 *dés ? Bien que le* 9 *et le* 12 *se décomposent en autant de façons que le* 10 *et le* 11*, ce qui fait qu'ils devraient être considérés comme ayant la même chance, on voit néanmoins que la longue observation a fait que les joueurs estiment plus avantageux le* 10 *et le* 11 *plutôt que le* 9 *et le* 12*"*
Examinons le cas de 9 et de 10 :
Joueur assidu, le Grand Duc de Toscane avait remarqué qu'en lançant 3 dés non truqués et en totalisant les points obtenus, il était plus fréquent d'obtenir 10 points que 9. Une telle constatation l'étonnait grandement, puisque 10 aussi bien que 9 se décompose tous deux de 6 manières différentes :

- $10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+4+4$
- $9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3$

Jérôme CARDAN n'arriva pas à résoudre ce problème. GALILEE lui le résoudra en utilisant la démarche ci-dessous que vous êtes invités à suivre :

1. Déterminer tous les triplets de points dont la somme est 10. Déterminer leur nombre puis en déduire la probabilité d'obtenir comme somme 10
2. Faites le même travail pour déterminer la probabilité d'obtenir 9
3. Conclure.

6.14 Far West - Antilles-Guyane C 77

Dans un village du Far-West, 2 désespérados Allodius Fillmore et Zébulon Bedloc s'affrontent dans un duel avec un colt à 6 coups.
A chaque échange de coups de feu, la probabilité m_2 pour qu'Allodius atteigne Zébulon est le double de la probabilité m_1 pour que Zébulon atteigne Allodius (Zébulon sort du saloon ! ! !).
Dans ce genre de rencontre, il n'y a que 2 issues possibles : ou bien on en sort indemmne ou bien on en sort mort.
D'après les statistiques établies par le croque-mort du village, la probabilité à chaque échange de coups de feu pour que l'un au moins des protagonistes gise mort dans la poussière est de $\frac{5}{8}$.
Soit A l'événement "les antagonistes restent tous les deux vivants après un coup de feu échangé".
Soit B l'événement "les antagonistes sont tués tous les deux après un coup de feu échangé"

1. Déterminer l'univers Ω traduisant le phénomène aléatoire suivant : "un coup de feu est tiré de part et d'autre"
2. Calculer m_1 puis la probabilité de chaque événement élémentaire.
3. Les adversaires tirent jusqu'à épuisement de leur barillet. Calculer la probabilité pour que, quand la fumée se dissipe, chacun s'aperçoive que son adversaire est toujours debout.

6.15 Concours entrée EPF 1993

Dans un univers Ω contenant un nombre fini d'éventualités, on considère 2 événements A et B tels que $Pr(A) = Pr(B) = x$ et on note $y = Pr(A \cap B)$

1. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les points M de coordonnées $(x; y)$
   (a) Que peut-on dire de x, de y ? Quelle relation existe entre x et y ?
   (b) Que peut-on dire de A, B lorsque les points M ont une abscisse nulle ? une ordonnée nulle ?
   (c) En évaluant $Pr(A \cup B)$, montrer que $0 \leq 2x - y \leq 1$. Représenter alors graphiquement la région acceptable pour les points $M(x; y)$
   (d) Pour quelles valeurs de x, A et B sont-ils d'intersection non vide ?
   (e) Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ pour lesquels A et B forment une partition de Ω.
2. Dans cette question, on considère 2 événements quelconques A et B de Ω. On note $x = Pr(A), y = Pr(B)$ et $z = Pr(A \cap B)$.. Dessiner graphiquement dans $\mathbb{R}^3$ la région acceptable pour les points $M(x; y; z)$

6.16 Bac C 87

1. Démontrer l'inégalité de BERNOULLI : $\forall x \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1 + x)^n \geq 1 + nx$
2. On dispose de n boules numérotées de 1 à n. On les place toutes au hasard dans n boîtes (chaque boîte pouvant contenir de 0 à n boules). On désigne par P_n la probabilité que chaque boîte contienne exactement une boule. Montrer que $P_n = \dfrac{n!}{n^n}$
3. En utilisant le 1°) montrer que $\forall n > 0 \quad \dfrac{P_n}{P_{n+1}} \geq 2$
4. En déduire que $P_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$
5. Quelle est $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} P_n$?

6.17 Oral Hec

Soient 3 èvènements A, B, C inclus dans un même univers et ayant la même probabilité p et tels que $P(A \cap B \cap C) = 0$

1. Démontrer que $p \leq \dfrac{2}{3}$
2. Créer une situation où $p = \dfrac{2}{3}$