Probabilités Conditionnelles

Christian CYRILLE

11 mars 2016

1 Probabilités conditionnelles

1.1 Définition

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
Soit A un événement de **probabilité non nulle**.
Alors l'application suivante notée

$$P_A : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$B \to P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

est une loi de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$
Notation : $P_A(B)$ s'écrit aussi $P(B/A)$ et se lit "Probabilité de B sachant que A est réalisé".

Démonstration :

1. Pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P_A(B)$ est un réel positif.
2. $P_A(\Omega) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$
3. Pour tous événements B et B' disjoints, $P_A(B \cup B') = P_A(B) + P_A(B')$
   en effet, $P_A(B \cup B') = \dfrac{P(A \cap (B \cup B'))}{P(A)} = \dfrac{P((A \cap B) \cup (A \cap B'))}{P(A)} = \dfrac{P(A \cap B) + P(A \cap B')}{P(A)}$
   car $(A \cap B) \cap (A \cap B') = A \cap (B \cap B') = A \cap \emptyset = \emptyset$
   d'où $P_A(B \cup B') = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} + \dfrac{P(A \cap B')}{P(A)} = P_A(B) + P_A(B')$

1.2 Propriétés

1.2.1 Corollaire

1. Si $P(A) \neq 0$ et $A \subset B$ alors $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$
2. Si $P(A) \neq 0$ et $B \subset A$ alors $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(B)}{P(A)}$
3. Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$

1.2.2 Corollaire : Formule de Probabilités des causes

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ alors $\boxed{P(A \cap B) = P_A(B)P(A) = P_B(A)P(B)}$ donc

$$P_A(B) = \frac{P(B)}{P(A)} P_B(A)$$

1.2.3 Formule des probabilités composées

Soient n événements ($n \geq 2$), $A_1, A_2, \cdots, A_n$ tels que $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \neq 0$

alors $\boxed{P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/(A_1 \cap A_2)) \cdots P(A_n/(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{n-1}))}$

1.2.4 Formule des probabilités totales

Si (E_i) , où i varie de 1 à n , est un **système complet d'événements** , chaque E_i étant de probabilité non nulle alors pour tout événement A , on a $\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/E_i)P(E_i)}$.

Démonstration :
$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) = P(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap E_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap E_i)$ car les $A \cap E_i$ sont disjoints deux à deux.
En effet , si $i \neq j$ alors $(A \cap E_i) \cap (A \cap E_j) = A \cap (E_i \cap E_j) = A \cap \emptyset = \emptyset$
Donc $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A/E_i)P(E_i)$

1.2.5 Formule de Bayes

(Thomas BAYES est un prêtre anglais né à Londres en 1702 et mort à Tundbridge en 1761)
Si (E_i) , où i varie de 1 à n , est un **système complet d'événements** , chaque E_i étant de probabilité non nulle alors pour tout événement A de **probabilité non nulle**,
on a :

$$\boxed{P(E_i/A) = \frac{P(A/E_i)P(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/E_i)P(E_i)}}$$

Démonstration :
$P(E_i/A) = \dfrac{P(A \cap E_i)}{P(A)} = \dfrac{P(A/E_i)P(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/Ei)P(Ei)}$

2 Indépendance

2.1 Evénements indépendants

Soient A et B des événements issus de l'univers Ω, tous deux de probabilité non nulle.
On dira que A et B sont indépendants lorsque la réalisation de B n'influe pas sur celle de A et vice-versa
c'est-à-dire que

$$\boxed{P(A/B) = P(A)P(B/A) = P(B)}$$

c'est-à-dire que

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

2.2 Propriétés

2.2.1 P1

Si A et B sont tous deux de probabilité non nulle et si A et B sont indépendants alors A et B sont compatibles.

Démonstration :
Raisonnons par l'absurde.
Supposons que A et B sont incompatibles donc $A \cap B = \emptyset$ donc $P(A \cap B) = 0$.
Or A et B sont indépendants donc $P(A)P(B) = P(A \cap B)$. Par conséquent, $P(A)P(B) = 0$ donc ou $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$. C'est impossible. Donc A et B sont compatibles.

2.2.2 P2

Si A et B sont tous deux de probabilité non nulle et si A et B sont incompatibles alors A et B sont dépendants.

Démonstration :
évidente - C'est un corollaire de P1

2.2.3 P3

Si $P(A) = 0$ (on dit alors que A est quasi-impossible) alors A est indépendant de tout autre événement B.

Démonstration :
$P(A)P(B) = 0P(B) = 0$. Comme $A \cap B \subset A$ donc $P(A \cap B) \leq P(A)$. Or $P(A) = 0$ donc $P(A \cap B) = 0$.
On a donc $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ donc A et B sont indépendants.

2.2.4 P4

> Si $P(A) = 1$ (on dit alors que A est quasi-certain) alors A est indépendant de tout autre événement B.

Démonstration :
$P(A)P(B) = 1P(B) = P(B)$. Or $P(A) = 1$ donc $P(\overline{A}) = 0$ donc $\overline{A}$ est indépendant de tout événement B.
$P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (A \cup) = P((B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})) = P((B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P((B \cap A) + P(B)P(\overline{A}) = P((B \cap A) + P(B)0 = P(B \cap A)$.
On a donc $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ donc A et B sont indépendants.

2.2.5 P5

> Si A et B sont indépendants alors les couples d'événements $(\overline{A}, B), (A, \overline{B})$ et $(\overline{A}, \overline{B})$ le sont aussi.

Démonstration :
démontrons d'abord que B et sont indépendants.
$P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (A \cup \overline{A}) = P((B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}))$.
Or $(B \cap A) \cap (B \cap \overline{A}) = B \cap (A \cap \overline{A}) = B \cap \emptyset = \emptyset$ donc $P(B) = P((B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(A)P(B) + P(B \cap \overline{A})$ d'où $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\overline{A})$.
Donc B et $\overline{A}$ sont indépendants.
On en déduit alors que $(A, \overline{B})$ et $(\overline{A}, \overline{B})$ le sont aussi

2.3 Mutuelle Indépendance

2.3.1

> A, B et C sont mutuellement indépendants si
>
> $$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ P(A \cap C) = P(A)P(C) \\ P(B \cap C) = P(B)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

2.3.2

> $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont mutuellement indépendants si toute intersection d'un nombre quelconque d'événements A_i a pour probabilité le produit des probabilités de ceux-ci
> c'est-à-dire $\forall k \in [|\ 2; n\ |]$ l'on a :
>
> $$P(\bigcap_{i=1}^{k} A_{j_i}) = \prod_{i=1}^{k} P(A_{j_i})$$
>
> où $j_1, j_2, \cdots, j_k$ est une combinaison des n nombres $1, \cdots, n$ pris k à k.
> L'indépendance mutuelle s'exprime par $2^n - n - 1$ égalités

2.3.3 Jeux de dés

On jette deux dés équilibrés.

1. Déterminer l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Justifier.
2. Soient les événements suivants :
   - A :" le résultat du dé 1 est pair"
   - B :" le résultat du dé 2 est impair"
   - C :" la somme des résultats des deux dés est paire"

   (a) Calculer $P(A)$ puis $P(B)$ et enfin $P(C)$

   (b) Calculer $P(A \cap B)$; $P(A \cap C)$; $P(B \cap C)$ et enfin $P(A \cap B \cap C)$

   (c) Conclusions ?

1. - $\Omega = \{(x, y)/x \in [|\ 1; 6\ |]\ et\ y \in [|\ 1; 6\ |]\} = [|\ 1; 6\ |]^2$ avec $Card(\Omega) = 36$.
   - La tribu utilisée est $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$
   - Comme les deux dés sont équilibrés alors les 36 événements élémentaires sont équiprobables donc la probabilité d'un événement A est $P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$
2. - A :" le résultat du dé 1 est pair"

dé1 / dé 2	1	2	3	4	5	6
1						
2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
3						
4	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
5						
6	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

   donc $P(A) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$
   - B :" le résultat du dé 2 est impair"

dé1 / dé 2	1	2	3	4	5	6
1	$\times$		$\times$		$\times$	
2	$\times$		$\times$		$\times$	
3	$\times$		$\times$		$\times$	
4	$\times$		$\times$		$\times$	
5	$\times$		$\times$		$\times$	
6	$\times$		$\times$		$\times$	

   donc $P(B) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$
   - C :" la somme des résultats des deux dés est paire"

dé1 / dé 2	1	2	3	4	5	6
1	$\times$		$\times$		$\times$	
2		$\times$		$\times$		$\times$
3	$\times$		$\times$		$\times$	
4		$\times$		$\times$		$\times$
5	$\times$		$\times$		$\times$	
6		$\times$		$\times$		$\times$

donc $P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

3. • $A \cap B$ = "Le résultat du dé 1 est pair et le résultat du dé 2 est impair"

dé1 / dé 2	1	2	3	4	5	6
1						
2	×		×		×	
3						
4	×		×		×	
5						
6	×		×		×	

donc $P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

• $A \cap C$ = "Le résultat du dé 1 est pair et la somme des résultats des deux dés est paire"

dé1 / dé 2	1	2	3	4	5	6
1						
2		×		×		×
3						
4		×		×		×
5						
6		×		×		×

donc $P(A \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

• $B \cap C$ = "Le résultat du dé 2 est impair et la somme des résultats des deux dés est paire"

dé1 / dé 2	1	2	3	4	5	6
1	×		×		×	
2						
3	×		×		×	
4						
5	×		×		×	
6						

donc $P(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

• $A \cap B \cap C$ = " Le résultat du dé 1 est pair et celui du dé 2 est impair et la somme des deux résultats est paire" est un événement impossible donc $P(A \cap B \cap C) = 0$

4. • $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ donc les événements A et B sont indépendants.
• $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ donc les événements A et C sont indépendants.
• $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ donc les événements B et C sont indépendants.
• Mais $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$ donc les événements A et B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

3 Exercices

3.1 Religions

Dans une ville, il y a 55% de catholiques et 45% d'adventistes. On sait que chez les catholiques, 80% se reposent le dimanche et 20% le samedi. On sait que chez les adventistes, 10% se reposent le dimanche et 90% le samedi. On choisit un habitant au hasard. Sachant qu'il se repose le samedi, quelle est la probabilité p pour qu'il soit adventiste ?

3.2 Efficacité d'un vaccin

Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate que sur 15 malades, il y a 2 personnes vaccinées.

1. Le vaccin est-il efficace ? On rappelle qu'un vaccin est efficace lorsque la probabilité d'être malade sachant que l'on est vacciné est inférieure à la probabilité d'être malade.
2. On suppose de plus que sur 100 personnes vaccinées, 8 sont malades. Quelle est la proportion de malades dans la population ?
3. Quelle est la probabilité de tomber malade pour une personne non vaccinée ?

3.3 Les moteurs défectueux

Une usine produit des moteurs. Un moteur a 1 chance sur 1000 d'être mauvais. Un contrôle systématique est fait pour chaque moteur. Ce contrôle détecte immanquablement un mauvais moteur mais rejette un bon moteur avec une probabilité de $\frac{1}{100}$. Sachant qu'un moteur est rejeté, quelle est la probabilité pour qu'il soit effectivement défectueux ?

3.4 Urnes

Une urne contient 3 pièces de monnaie bien équilibrées. 2 d'entre elles sont normales. : elles possèdent une face F et une face P. La 3^{eme} est truquée car elle comporte 2 faces F. On prend une pièce au hasard dans l'urne. On effectue de manière indépendante des lancers de cette pièce. On considère les événements suivants :

- B : " la pièce prise est normale"
- $\overline{B}$: "la pièce prise est truquée"
- P_1 : " on obtient pile au premier lancer"
- F_n : " on obtient face pour les n premiers lancers"

1. Déterminer $P_(P_1 \cap B)$ puis $P(P_1 \cap \overline{B})$ et enfin $P(P_1)$
2. (a) Démontrer que $F_n = (F_n \cap B) \cup (F_n \cap \overline{B})$
   (b) Démontrer que $P(F_n) = \frac{1}{3}(1 + (\frac{1}{2})^{n-1})$
3. Sachant que l'on a obtenu face aux n premiers lancers
   (a) Déterminer $P($ "avoir pris la pièce truquée")
   (b) déterminer la limite de cette probabilité quand $n \mapsto +\infty$

3.5 Médicaments

On teste un médicament parmi un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie élevé. Pour cela 60% des individus prennent le médicament. Les autres recoivent un placebo(substance neutre que l'on substitue à un médicament afin d'étudier l'action psychologique et l'action réelle de ce dernier) L'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie. Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de $0,8$. On ne constate aucune baisse de taux pour 90% des personnes ayant pris le placebo. On appelle :

- M l'événement : " avoir pris le médicament"
- $\overline{M}$ l'événement contraire
- B l'événement "avoir une baisse du taux de glycémie"
- $\overline{B}$ l'événement contraire

1. Déterminer les probabilités suivantes $P(M); P(\overline{M}); P(B/M); P(B/\overline{M}); P(\overline{B}/M); P(\overline{B}/\overline{M})$
2. (a) Démontrer que $B = (B \cap M) \cup (B \cap \overline{M})$
   (b) Utiliser l'égalité précédente pour montrer que la probabilité $P(B) = 0,52$
3. On soumet au test un individu pris au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament si l'on ne constate pas de baisse de son taux de glycémie ?
4. On contrôle 5 individus au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux n'a pas baissé ? Le résulta sera donné sous forme décimale à 10^{-3} près.

3.6 Bac S Antilles Juin 2001

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles. Un joueur achète $10F$ un billet permettant de participer à un jeu constitué d'un grattage suivi d'une loterie. Il gratte une case sur le billet. Il peut alors gagner $100F$ avec une probabilité de $\frac{1}{50}$ ou bien ne rien gagner.

- G désigne l'événement "le joueur gagne au grattage".
  Il participe ensuite à une loterie avec le même billet . A cette loterie, il peut gagner $100F$ ou $200F$ ou bien ne rien gagner.
- L_1 désigne l'événement :"Le joueur gagne $100F$ à la loterie"
- L_2 désigne l'événement :"Le joueur gagne $200F$ à la loterie"
- P désigne l'événement :"Le joueur ne gagne rien à la loterie"

Si le joueur n'a rien gagné au grattage, la probabilité qu'il gagne $100F$ à la loterie est $\frac{1}{70}$ et la probabilité qu'il gagne $200F$ à la loterie est $\frac{1}{490}$

1. Faire un arbre sur lequel on indiquera les renseignements qui précèdent.
   (a) Calculer la probabilité pour que le joueur ne gagne rien à la loterie sachant qu'il n'a rien gagné au grattage. Compléter l'arbre obtenu avec cette valeur
   (b) Au bout de chaque branche, indiquer le gain algébrique total du joueur ,après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.
2. On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique total du joueur ,après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet. La probabilité de l'événement "$X = 90$"" est $\frac{2}{125}$. La probabilité de l'événement "$X = 190$" est $\frac{1}{250}$
   (a) Montrer que la probabilité que le joueur gagne $100F$ à la loterie sachant qu'il a gagné $100F$ au grattage est égale à $\frac{1}{10}$

(b) Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie sachant qu'il a gagné $100F$ au grattage

(c) Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance de X.

3.7 Bac L Antilles Juin 03

On donnera les résultats sous forme irréductible. On dispose d'un damier dont chacune des neuf cases est marquée d'un des trois nombres $1, 2$ et 3 selon le schéma ci-contre :

1	2	3
2	3	1
3	1	2

On répartit au hasard trois pions indiscernables sur le damier (un pion par case) et on appelle S la somme des trois nombres marqués sur les trois cases occupés par les pions. Les répartitions sont toutes équiprobables.

1. Ecrire le triangle de Pascal jusqu'à la dixième ligne et en déduire $\binom{9}{3}$
2. On considère les événements E, F et G suivants :
   - E :" La somme S est égale à 3"
   - F : " La somme S est égale à 9 "
   - G : " La somme S est égale à 6 "

   (a) Déterminer les probabilités $P(E)$ et $P(F)$ des événements E et F

   (b) Montrer que la probabilité de l'événement G est égale à $\frac{1}{3}$
3. Soit A l'événement :" La somme S est divisible par 3 " et B l'événement : " Les trois pions sont alignés en colonne, en ligne ou en diagonale"

   (a) Déterminer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$ des événements A et B

   (b) Calculer la probabilité $P_A(B)$ de l'événement B sachant que A est réalisé

   (c) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

3.8 Bac Antilles-Guyane S 01

Un tournoi oppose 2 équipes A et B qui jouent 3 parties successives d'un même jeu.
Le vainqueur du tournoi est l'équipe qui a gagné le plus de parties.
Chaque équipe est notée respectivement A, B ou N suivant que l'équipe A gagne, l'équipe B gagne ou la partie est nulle.
La probabilité pour que A gagne est de $0,5$, celle de B : $0,4$ et celle d'un match nul de $0,1$ pour chaque partie.

1. Dresser la liste des tournois sans vainqueur. Justifier qu'ils sont au nombre de 7.
2. Montrer que la probabilité pour que le tournoi sans vainqueur est égale à $0,121$
3. Calculer la probabilité pour que l'équipe A gagne exactement une partie du tournoi et gagne le tournoi.
4. Montrer que la probabilité pour que l'équipe A soit vainqueur du tournoi est $0,515$
5. Sachant que l'équipe B est vainqueur du tournoi, calculer la probabilité que l'équipe B ait gagné exactement 2 parties.

3.9 Oral Hec

Soient 3 èvènements A, B, C inclus dans un même univers et ayant la même probabilité p et tels que $P(A \cap B \cap C) = 0$

1. Démontrer que $p \leq \dfrac{2}{3}$
2. Créer une situation où $p = \dfrac{2}{3}$
3. On suppose de plus que ces 3 èvènements soient indépendants 2 à 2. Démontrer que $p \leq \dfrac{1}{2}$
4. Créer une situation où $p = \dfrac{1}{2}$