Variables Aléatoires Réelles

Christian CYRILLE

19 juin 2017

" Le hasard pimente la vie."

1 Rappels

1.1 Image d'un sous ensemble

Si f est une application d'un ensemble E vers un ensemble F,
si A est une partie de E alors $f < A >$ est l'ensemble formé des images des éléments de A et s'appelle **l'ensemble image de** A **par** f.

1.1.1 Propriétés

A et B étant des parties de E alors
- Si $A \subset B$ alors $f < A > \subset f < B >$
- $f < A \cup B >= f < A > \cup f < B >$
- $f(A \cap B > \subset f < A > \cap f < B >$. La réciproque est vraie lorsque f est injective.

1.2 Image réciproque d'un sous ensemble

Si f est une application d'un ensemble E vers un ensemble F,
si A' est une partie de F alors $f^{-1} < A' >$ est l'ensemble formé des antécédents par f des éléments de A' et s'appelle **l'ensemble image réciproque de** A' **par** f.

1.2.1 Propriétés

Si A' et B' étant des parties de F alors
- Si $A' \subset B'$ alors $f^{-1} < A' > \subset f^{-1} < B' >$
- $f^{-1} < A' \cup B' >= f^{-1} < A' > \cup f^{-1} < B' >$
- $f^{-1} < A' \cap B' >= f^{-1} < A' > \cap f^{-1} < B' >$

2 Variable aléatoire réelle discrète

2.1 Définition

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
On appelle variable aléatoire réelle ou aléa numérique toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$
L'ensemble des images des éléments de Ω par la variable aléatoire réelle X s'appelle l'univers-image et se note $X < \Omega >$.
On construit alors l'espace probabilisable image $(X < \Omega >, P(X < \Omega >)$
Lorsque $X < \Omega >$ est fini ou infini dénombrable, la variable aléatoire X est dite discrète.

- Dans le cas fini où Ω est fini et $Card(\Omega) = n$,
  on notera $X < \Omega >= \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$
- Dans le cas où Ω est infini dénombrable,
  on notera $X < \Omega >= \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ où $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$

2.2 Exemples

1. Lorsque l'on jette 2 dés portant des numéros de 1 à 6, on peut s'intéresser à $X =$ la somme des numéros situés sur les faces de dessus.
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = [| \ 1; 6 \ |]^2$.
   $X < \Omega >= \{2, 3, 4, \cdots, 11, 12\} = [| \ 2; 12| \ |]$ (en informatique on écrit 2..12)
2. Lorsqu'on jette un dé jusqu'à l'obtention de 6, on peut s'intéresser à $X =$ le nombre de lancers nécessaires à l'obtention de 6 pour la première fois
   alors $\Omega = \{$listes de nombres compris entre 1 et 6$\}$.
   $Card(\Omega)$ n'est pas fini sinon Ω aurait un nombre fini de listes qui elles auraient nécessairement une longueur finie et alors on obtiendrait en n jets des listes du type $(1, 1, 1, \cdots, 1)$ avec n fois 1 . Il n'y aurait donc pas de 6 ce qui est impossible.
   Ω est donc dénombrable et $X < \Omega >= \mathbb{N}^*$

3 Loi de probabilité de la variable aléatoire X

L'application suivante

$$\begin{array}{rccc} P_X : & \mathcal{P}(X < \Omega >) & \longrightarrow & [0; 1] \\ & A' & \longmapsto & P_X(A') = P(X^{-1} < A' >) \end{array}$$

est une loi de probabilité appelée la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle X.

3.1 Démonstration

1. $P_X(A') \geq 0$ car $P_X(A') = P(X^{-1} < A' >)$ et $P(X^{-1} < A' >) \geq 0$
2. $P_X(X < \Omega >) = P(X^{-1} < X < \Omega >>) = P(\Omega) = 1$
3. Soient A' et B' des parties de $X < \Omega >$ telles que $A' \cup B' = \emptyset$ alors
   $P_X(A' \cup B') = P(X^{-1} < A' \cup B' >) = P(X^{-1} < A' > \cup X^{-1} < B' >)$
   $= P(X^{-1} < A' >) + P(X^{-1} < B' >) = P_X(A') + P_X(B')$
   car $X^{-1} < A' > \cap X^{-1} < B' >= X^{-1} < A' \cap B' >= X^{-1} < \emptyset >= \emptyset$

3.2 Remarques

3.2.1 Notations

Soient a et b des nombres réels.

- On notera $[X = a]$ l'événement $X^{-1} < \{a\} >= \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\}$
- On notera $[X \leq a]$ l'événement $X^{-1} < \{]-\infty; a]\} >= \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq a\}$
- On notera $[a \leq X < b]$ l'événement $X^{-1} < \{[a; b[\} >= \{\omega \in \Omega / a \leq X(\omega) < b\}$

3.2.2 Procédure lorsque $X < \Omega >$ est fini

Lorsque $\Omega = \{x_1; x_2; \cdots; x_n\}$, la loi de probabilité de X est entièrement déterminée par la connaissance des $P([X = x_i])$ que l'on peut présenter dans un tableau :

Valeurs de X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	Total
$p_i = P([X = x_i])$					1
$p_i x_i$					$\overline{X} = E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
x_i^2					
$p_i x_i^2$					$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2$

On peut alors en déduire d'après la formule de Huyghens-Koenig la valeur de la variance $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ puis la valeur de l'écart-type $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

3.2.3 Procédure lorsque $X < \Omega >$ est infini dénombrable

$X < \Omega >= \{x_1; x_2; \cdots; x_n; \cdots\}$ est dénombrable.
On détermine carrément la formule générale exprimant la valeur de $P([X = x_i])$.
Par exemple, dans le cas où X = le nombre de jets d'un dé nécessaire pour obtenir un 6 on a :
$X < \Omega >= \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P([X = n]) = (\frac{5}{6})^{n-1}\frac{1}{6}$

4 Fonction de répartition

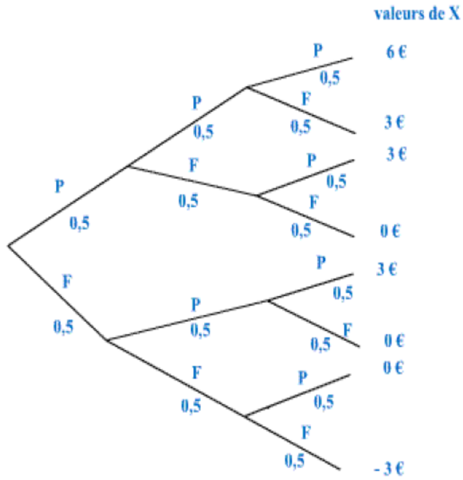
4.1 Définition

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X l'application

$$\begin{array}{rccc} F_X : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0;1] \\ & x & \longmapsto & F_X(x) = P([X \leq x]) \end{array}$$

4.2 Exemple

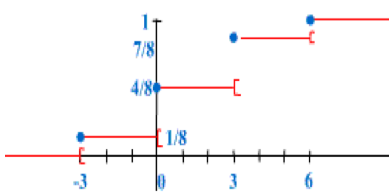
On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 2 euros pour chaque résultat "Pile" et on perd 1 euro pour chaque résultat "Face".
Soit X la variable aléatoire représentant le gain obtenu. Déterminer la loi de probabilité de X puis représenter graphiquement sa fonction de répartition .



Valeurs de X	-3	0	3	6	Total
$p_i = P([X = x_i])$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

d'où

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -3 \\ \frac{1}{8} \text{ si } -3 \leq x < 0 \\ \frac{4}{8} \text{ si } 0 \leq x < 3 \\ \frac{7}{8} \text{ si } 3 \leq x < 6 \\ 1 \text{ si } 6 \leq x \end{cases}$$



4.3 Propriétés

1. F_X est une fonction en escalier croissante.
2. $\lim_{x \mapsto -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \mapsto +\infty} F(x) = 1$
3. F_X est une fonction continue en tout $x \neq x_i$ et discontinue en tout x_i car elle est non continue à gauche en x_i et continue à droite en x_i
4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad P([X > x]) = 1 - P([X \leq x]) = 1 - F_X(x)$
5. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad P([a < X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a)$

5 Espérance Mathématique ou Moyenne

" La crainte gouverne le monde et l'espérance le console."
Gaston de LEVIS

5.1 Définitions

Formule générale : On appelle **espérance mathématique ou moyenne de la var discrète X ou moment d'ordre** 1 le nombre suivant :

$$E(X) = \sum_{i?I} x_i P([X = x_i]) = \text{le barycentre des valeurs pondérées par leurs probabilités}$$

. On note aussi ce nombre $\overline{X}$ Avec 2 déclinaisons :

1. **Dans le cas où I est fini et** $Card(I) = n$,
   on notera $X < \Omega >= \{x_1; x_2; \cdots; x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$
   $$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P([X = x_i])$$
2. **Dans le cas où I est infini dénombrable**,
   on notera $X < \Omega >= \{x_i / i \in I\}$
   $$E(X) = \text{ la somme de la série } \sum_{i \in I} x_i P([X = x_i])$$
   à condition que cette série soit **absolument convergente**

Lorsque $E(X) = 0$ on dit alors que la variable aléatoire X est **centrée**

5.2 Propriétés de l'espérance

5.2.1 P_1

Soit C une variable aléatoire constante alors $E(C) = C$

5.2.2 P_2

Définition du produit d'un réel par une variable aléatoire :
Si X est une variable aléatoire réelle alors pour tout réel λ

$$\begin{array}{rccc} \lambda X : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & (\lambda X)(\omega) = \lambda X(\omega) \end{array}$$

Pour tout réel λ , pour toute variable aléatoire réelle X , λX est une variable aléatoire réelle et $E(\lambda X) = \lambda E(X)$

5.2.3 P_3

Définition de la somme de deux variables aléatoires :
Si X et Y sont des variables aléatoires réelles alors

$$\begin{array}{rccc} X+Y : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & (X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega) \end{array}$$

Pour toutes variables aléatoires réelles X et Y alors $X+Y$ est une variable aléatoire réelle et $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

5.2.4 P_4

Pour tous réels α et β , pour toutes variables aléatoires réelles X et Y,
la combinaison linéaire $\alpha X + \beta Y$ est une variable aléatoire réelle et $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$

L'ensemble $\mathcal{V}$ des variables aléatoires réelles discrètes définies sur un même univers Ω muni de l'opération d'addition de variables aléatoires discrètes et de l'opération de multiplication d'une variable aléatoire discrète par un réel est un espace vectoriel réel et que l'application espérance

$$\begin{array}{rccc} E : & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & X & \longmapsto & E(X) \end{array}$$

est une **application linéaire** de $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{R}$ (on parlera alors de forme linéaire) car elle vérifie P_2 et P_3 (ou encore P_4 qui est équivalente à P_2 et P_3)

5.2.5 P_5 : Théorème du transfert

Pour toute variable aléatoire réelle X , soit g une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Alors $g \quad o \quad X$ est une variable aléatoire réelle et $E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i) P([X = x_i])$ à condition que $Y = g(X)$ a une espérance.

6 Variance, Ecart-type

6.1 Définitions

Formule générale : On appelle variance de la variable aléatoire discrète X ou moment centré d'ordre 2 le nombre suivant :
$Var(X) = E((X - E(X))^2) =$ l'espérance du carré des écarts à la moyenne
$Var(X) = \sum_{i \in I} (x_i - E(X))^2 P([X = x_i])$ Avec 2 déclinaisons :

1. **Dans le cas où I est fini et $Card(I) = n$**,
   on notera $X < \Omega >= \{x_1; x_2; \cdots; x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2 P([X = x_i])$$

2. **Dans le cas où I est infini dénombrable**,
   on notera $X < \Omega >= \{x_i / i \in I\}$

$$Var(X) = \text{ la somme de la série } \sum_{i \in I} (x_i - \overline{X})^2 P([X = x_i])$$

   à condition que cette série soit **absolument convergente**

Lorsque $var(X) = 0$ on dit alors que la variable aléatoire X est **constante**.
Lorsque $var(X) = 1$ on dit alors que la variable aléatoire X est **réduite**.

6.2 Propriétés

6.2.1 P_1

$var(X) \geq 0$

6.2.2 Définition de l'écart-type

On appelle écart-type $\sigma(X)$ la racine carrée de la variance $\sigma(X) = \sqrt{var(X)}$

6.2.3 P_2 - Formule de Koenig-Huyghens

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Démonstration :
En utilisant la linéarité de l'espérance,
$Var(X) = E((X - \overline{X})^2) = E(X^2 - 2\overline{X}X + \overline{X}^2) = E(X^2) - 2\overline{X}E(X) + \overline{X}^2$
$= E(X^2) - 2\overline{X}^2 + \overline{X}^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$
Cette formule explique la disposition suivante lorsque l'univers-image est fini :

Valeurs de X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	Total
$p_i = P([X = x_i])$					1
$p_i x_i$					$\overline{X} = E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
x_i^2					
$p_i x_i^2$					$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2$

6.2.4 P_3

Pour tout réel λ, pour toute variable aléatoire réelle X ,

$$Var(\lambda X) = \lambda^2 Var(X)$$

$$var(X + \lambda) = var(X)$$

6.2.5 P_4

si l'on note $m = E(X)$ et $\sigma = \sqrt{Var(X)}$ alors

- $E(\dfrac{X-m}{\sigma}) = 0$ donc $\dfrac{X-m}{\sigma}$ est centrée.
- $Var(\dfrac{X-m}{\sigma}) = 1$ donc $\dfrac{X-m}{\sigma}$ est réduite.
- En conclusion $\dfrac{X-m}{\sigma}$ **est centrée réduite**

- $E(\dfrac{X-m}{\sigma}) = \dfrac{1}{\sigma}E(X-m) = \dfrac{1}{\sigma}(E(X) - E(m)) = \dfrac{1}{\sigma}(m-m) = \dfrac{1}{\sigma}(0) = 0$
- $Var(\dfrac{X-m}{\sigma}) = \left(\dfrac{1}{\sigma}\right)^2 Var(X-m) = \dfrac{1}{\sigma^2}(Var(X)) = \dfrac{1}{\sigma^2}\,\sigma^2 = 1$.

6.2.6 Un exemple d'utilisation de P_4

Par exemple, si X est une variable aléatoire suivant la loi normale de Laplace-Gauss $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ alors $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ appelée encore la loi normale centrée réduite.

6.2.7 Variables aléatoires indépendantes

> Des variables aléatoires réelles X et Y sont dites indépendantes lorsque leurs lois de probabilités P_X et P_Y sont indépendantes
> c'est-à-dire que $\forall x_i \in X < \Omega > \ \forall y_j \in Y < \Omega >$
>
> $$Pr([X = x_i] \cap (Y = y_j]) = Pr([X = x_i])Pr([Y = y_j])$$

On comprend mieux l'indépendance de X et de Y en considérant les probabilités conditionnelles.
Dire que X et Y sont indépendantes $\iff$ la réalisation de X ne dépend pas de celle de Y et vice-versa.
$\iff Pr([X = x_i]/[Y = y_j]) = Pr([X = x_i])$
$\iff \dfrac{Pr([X = x_i] \cap [Y = y_j])}{Pr([Y = y_j])} = Pr([X = x_i])$
$\iff Pr([X = x_i] \cap (Y = y_j]) = Pr([X = x_i])Pr([Y = y_j])$

6.2.8 Covariance

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles alors on appelle covariance de X et de Y que l'on note $Cov(X,Y)$le nombre suivant $E((X-\overline{X})(Y-\overline{Y}))$

6.2.9 Coefficient de corrélation

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles alors on appelle coefficient de corrélation de X et de Y que l'on note $r(X,Y)$ le nombre suivant $r(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y} = \dfrac{E((X-\overline{X})(Y-\overline{Y}))}{\sigma_X\,\sigma_Y}$

6.2.10 Produit de deux variables aléatoires

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles alors

$$\begin{array}{rccc} XY: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & (XY)(\omega) = X(\omega)Y(\omega) \end{array}$$

6.2.11 P_5

si X et Y sont **indépendantes** alors

- $E(XY) = E(X)E(Y)$
- $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$
- $cov(X,Y) = 0$

Démonstration :

- $E(XY) = \sum\limits_{i,j} x_i y_j Pr([X=x_i] \cap [Y=y_j]) = \sum\limits_{i,j} x_i y_j Pr([X=x_i])Pr([Y=y_j])$ car les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
  donc $E(XY) = \sum\limits_{i} x_i Pr([X=x_i]) \sum\limits_{i} y_j Pr([Y=y_j]) = E(X)E(Y)$
- D'après la formule de Huyghens-Koenig,
  $var(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2 = E(X^2+2XY+Y^2) - [E(X)^2 + E(Y)^2 + 2E(X)E(Y)]$
  D'après la linéarité de l'espérance
  $Var(X+Y) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - E(Y)^2 - 2E(X)E(Y)]$
  Or X et Y sont indépendantes donc $E(XY) = E(X)E(Y)$ d'où
  $Var(X+Y) = E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2) - E(X)^2 - E(Y)^2 - 2E(X)E(Y)]$
  D'où $Var(X+Y) = E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 = Var(X) + var(Y)$
  d'après la formule de Huyghens-Koenig.
- $Cov(X,Y) = E((X-\overline{X})(Y-\overline{Y})) = E(XY - X\overline{Y} - \overline{X}Y + \overline{XY})$
  Comme l'espérance est linéaire, alors $Cov(X,Y) = E(XY) - \overline{Y}E(X) - \overline{X}E(Y) + E(\overline{XY})$
  Or X et Y sont indépendantes donc $E(XY) = E(X)E(Y)$ donc
  $Cov(X,Y) = E(X)E(Y) - \overline{Y}E(X) - \overline{X}E(Y) + \overline{XY} = \overline{XY} - \overline{YX} - \overline{XY} + \overline{XY} = 0$

6.3 Remarque

Attention ! La réciproque est fausse : Ce n'est pas parce que $E(XY) = E(X)E(Y)$ que l'on peut conclure à l'indépendance de X et de Y.
Contre-Exemple :
Soit un espace probabilisé $\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ où $\Omega = \{1;2;3\}$ et P la loi de probabilité uniforme.
Soient les variables aléatoires

$$\begin{array}{rccc} X: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & X(\omega) = \omega \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} Y: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & Y(\omega) = (\omega - 2)^2 \end{array}$$

1. Déterminer XY
2. Déterminer $E(X)$ puis $E(Y)$
3. Déterminer $E(XY)$.
4. Déterminer $P([X = 1] \cap [Y = 1])$ et $P([X = 1])P([Y = 1])$.
   X et Y sont-elles indépendantes ?

ω	1	2	3
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$X(\omega) = \omega$	1	2	3
$(\omega - 2)$	-1	0	1
$Y(\omega) = \omega(\omega - 2)^2$	1	0	1
$XY(\omega) = \omega(\omega - 2)^2$	1	0	3

1. $X < \Omega >= \{1;2;3\}$ d'où
   $E(X) = 1\, P([X = 1] + 2\, P([X = 2] + 3\, P([X = 3] = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} = 2.$
2. $Y < \Omega >= \{0;1\}$ d'où $E(Y) = 0\, P([Y = 0] + 1\, P([Y = 1] = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$
3. $XY < \Omega >= \{0;1;3\}$ d'où
   $E(XY) = 0\, P([XY = 0]) + 1\, P([XY = 1]) + 3\, P([XY = 3]) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$
   donc $E(XY) = E(X)E(Y)$
4. mais X et Y ne sont pas indépendantes car :
   $P([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{3} \neq P([X = 1])P([Y = 1]) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

7 Inégalité de Bienaimé-Tchebichev

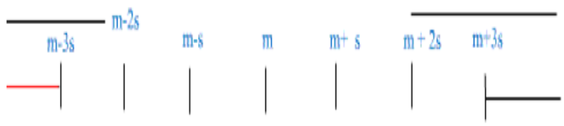
7.1 4 formes équivalentes

Soit X une variable aléatoire réelle discrète de moyenne m et d'écart type σ

1. Forme 1 : $\forall t > 0 \;\; P([\mid X - m \mid \geq \; t\,]) \leq \dfrac{\sigma^2}{t^2}$
2. Forme 2 : $\forall t > 0 \;\; P([\mid X - m \mid < \; t\,]) \; \geq 1 - \dfrac{\sigma^2}{t^2}$
3. Forme 3 : $\forall k > 0 \;\; P([\mid X - m \mid < \; k\,\sigma\,]) \; \geq 1 - \dfrac{1}{k^2}$
4. Forme 4 : $\forall k > 0 \;\; P([\mid X - m \mid \geq \; k\,\sigma\,]) \; \leq \dfrac{1}{k^2}$

Cas particuliers :

- Pour $k = 2$ on a donc $P(|X - m| \geq 2\sigma) \leq \dfrac{1}{4} = 0,25$
- Pour $k = 3$ on a donc $P(|X - m| \geq 2\sigma) \leq \dfrac{1}{9} = 0,11$



7.1.1 Démonstration Forme 1

Notons $X < \Omega >= \{x_1; x_2; x_3; \cdots; x_n\}$ et $p_i = P([X = x_i])$
Nous partitionnons l'ensemble $I = [|\; 1; n \;|]$ des indices en deux sous-ensembles :

- $I_1 = \{i \in I / \mid X - m \mid \geq \; t\}$ l'ensemble des indices des valeurs x_i telles que la distance de x_i à la moyenne m dépasse t
- $I_2 = \{i \in I / \mid X - m \mid < \; t\}$ l'ensemble des indices des valeurs x_i telles que la distance de x_i à la moyenne m reste en dessous de t

Alors
$\sigma^2 = Var(X) = E((X - m)^2) = \sum_{i \in I} p_i (x_i - m)^2$
$= \sum_{i \in I_1} p_i (x_i - m)^2 + \sum_{i \in I_2} p_i (x_i - m)^2$
Or $\forall i \in I_2,\; p_i (x_i - m)^2 \geq 0$ donc $\sum_{i \in I_2} p_i (x_i - m)^2 \geq 0$
On en déduit que $\sigma^2 \geq \sum_{i \in I_1} p_i (x_i - m)^2 \geq \sum_{i \in I_1} p_i t^2 = t^2 \sum_{i \in I_1} p_i = t^2 P([\;\mid X - m \mid \geq \; t])$.

car $\sum_{i \in I_1} p_i = P([\;\mid X - m \mid \geq \; t])$ donc $\boxed{\forall k > 0 \;\; P([\mid X - m \mid \geq \; t]) \leq \dfrac{\sigma^2}{t^2}}$

7.1.2 Démonstration Forme 2

On suppose démontrée la forme 1 ;

$\forall t > 0 \ \ P([\mid X - m \mid < t]) = 1 - P([\mid X - m \mid \geq t])$ Or $P([\mid X - m \mid \geq t]) \leq \dfrac{\sigma^2}{t^2}$ donc $-P([\mid X - m \mid \geq t]) \geq -\dfrac{\sigma^2}{t^2}$ d'où $1 - P([\mid X - m \mid \geq t]) \geq 1 - \dfrac{\sigma^2}{t^2}$.

Par conséquent, $\boxed{\forall t > 0 \ \ P([\mid X - m \mid < t]) \geq 1 - \dfrac{\sigma^2}{t^2}}$

7.1.3 Démonstration Forme 3

On passe de la forme 2 à la forme 3 en posant $t = k\sigma$

7.1.4 Démonstration Forme 4

On passe de la forme 1 à la forme 4 en posant $t = k\sigma$

8 Exercices

8.1 Du rôle de la moyenne

Un parent veut envoyer 100 € à son enfant par la poste.
Sachant qu'une lettre a 1 chance sur 2 d'être perdue, il hésite entre 2 solutions :

1. soit envoyer une lettre contenant 100 €
2. soit envoyer deux lettre contenant chacune 50 €

Quelle est la meilleure solution ?

1. en ne tenant pas compte du prix des timbres.
2. en tenant compte du prix des timbres.

8.1.1 Corrigé

1. Dans le cas de l'envoi d'une lettre contenant 100 €

   - l'univers $\Omega = \{\overline{L}; L\}$
     L veut dire que la lettre L est arrivée et $\overline{L}$ que la lettre L est perdue
   - Soit X la variable aléatoire réelle "Le montant perçu par l'enfant"
     alors $X < \Omega >= \{0; 100\}$
   - $Pr([X = 0]) = Pr(\overline{L}) = \dfrac{1}{2}$
   - $Pr([X = 100]) = Pr(L) = \dfrac{1}{2}$

   Par conséquent , $E(X) = 0Pr([X = 0]) + 100Pr([X = 100]) = 0 \times \dfrac{1}{2} + 100 \times \dfrac{1}{2} = 50$ €
2. Dans le cas de l'envoi de deux lettres contenant chacune 50 €

   - l'univers $\Omega = \{(\overline{L_1}, \overline{L_2}); (\overline{L_1}, L_2); (L_1, \overline{L_2}); (L_1, L_2)\}$
     où L_i veut dire que la lettre L_i est arrivée et $\overline{L_i}$ que la lettre L_i est perdue.
   - Soit X la variable aléatoire réelle "Le montant perçu par l'enfant"
     alors $X < \Omega >= \{0; 50; 100\}$
   - $Pr([X = 0) = Pr((\overline{L_1}, \overline{L_2})) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ car les évènements $\overline{L_1}$ et $\overline{L_2}$ sont indépendants.
   - $Pr([X = 50) = Pr((\overline{L_1}, L_2) ou (L_1, \overline{L_2}) = Pr((\overline{L_1}, L_2) + Pr((L_1, \overline{L_2}))$ car les évènements sont disjoints
     Par conséquent , $Pr([X = 50) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$ car les évènements $\overline{L_1}$ et L_2 sont indépendants ainsi que L_1 et $\overline{L_2}$.
   - $Pr([X = 100) = Pr((L_1, L_2)) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ car les évènements L_1 et L_2 sont indépendants.

   $E(X) = 0Pr([X = 0]) + 50Pr([X = 50]) + 100Pr([X = 100]) = 0 \times \dfrac{1}{4} + 50 \times \dfrac{1}{2} + 100 \times \dfrac{1}{4} = 50$ €

Si l'on ne tient pas compte du prix des timbres, aucune des solutions n'est meilleure.
Par contre, si l'on tient compte du prix des timbres, la meilleure solution est l'envoi d'une seule lettre.

8.2 Location de scooters des mers

Un loueur de scooters des mers dispose de 10 scooters qu'il loue à la journée.
Partie A
On désigne par d_i le nombre de demandes journalières de location.
Une étude de marché préalable a permis de déterminer les probabilités p_i attachées aux différentes valeurs de d_i.

d_i	p_i
0	$0,002$
1	$0,012$
2	$0,076$
3	$0,121$
4	$0,172$
5	$0,213$
6	$0,198$
7	$0,121$
8	$0,042$
9	$0,030$
10 ou plus	$0,013$

Les frais fixes journaliers (entretien, charges sociales, ...) du loueur s'élèvent à 200 €.Le montant de la location par jour d'un vélo s'élève à 50 €. Si d représente le nombre de vélos loués en un jour, on appelle X le nombre réel égal (avec les conventions de signe convenables) à la somme en € gagnée ou déboursée par le loueur.

1. Donner l'expression de X en fonction de d.
2. Calculer l'espérance mathématique de X.

Partie B
Les probabilités de demande journalière restant les mêmes, on suppose que le loueur ne possède plus que 6 vélos. Ses frais fixes sont alors réduits à 120 € tandis que le montant de la location journalière tandis que le montant de la location journalière reste fixé à 50 €. En désignant par d le nombre de vélos loués en un jour et Y le nombre réel égal (avec les conventions de signe convenables) à la somme en € gagnée ou déboursée par le loueur.

1. Donner l'expression de Y en fonction de d
2. Calculer l'espérance mathématique de Y

Conclusion : Que peut-on tirer comme enseignement pratique de cette double étude théorique ?

8.2.1 Corrigé

Partie A

1. $X = -200 + 50d$
2.

d_i	p_i	x_i	$x_i p_i$
0	$0,002$	-200	$-0,4$
1	$0,012$	-150	$-1,8$
2	$0,076$	-100	$-7,6$
3	$0,121$	-50	$-6,05$
4	$0,172$	0	0
5	$0,213$	50	$10,65$
6	$0,198$	100	$19,8$
7	$0,121$	150	$18,15$
8	$0,042$	200	84
9	$0,030$	250	$7,5$
10 ou plus	$0,013$	300	$3,9$
Total	1		**E(X) = 53,35**

Partie B

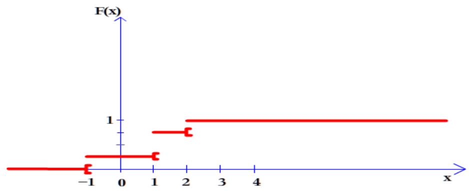
1. $Y = -120 + 50d$
2. $Pr($ "Plus de 6 demandes" $) = 0,198 + 0,0121 + 0,042 + 0,030 + 0,013 = 0,404$

d_i	p'_i	y_i	$y_i p'_i$
0	$0,002$	-120	$-0,24$
1	$0,012$	-70	$-0,84$
2	$0,076$	-20	$-1,52$
3	$0,121$	30	$3,63$
4	$0,172$	80	$13,70$
5	$0,213$	130	$27,69$
6 ou plus	**0,404**	180	$72,72$
Total	1		**E(Y) = 115,2**

En conclusion, pour avoir plus de bénéfices, le loueur a intérêt à réduire son parc de scooters de mer de 10 unités à 6 unités.

8.3 De la fonction de répartition à la loi de probabilité

Soit la variable aléatoire X dont la fonction de répartition est représentée ci-dessous :



Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique, sa variance et son écart-type.

8.3.1 Corrigé à arranger

- D'après le graphique, on peut donc affirmer que $X < \Omega >= \{-1;1;2\}$.
- On explicite la fonction de répartition $F : x \mapsto F(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x \in]-\infty;-1[\\ \frac{1}{4} \; si \; x \in [-1;1[\\ \frac{3}{4} \; si \; x \in [1;2[\\ 1 \; si \; x \in [2;+\infty[\end{cases}$
- Comme $\forall x \in \mathbb{R} \; F(x) = P([X \leq x])$ on peut reconstituer le tableau des probabilités

x_i	-1	1	2	$total$
$P([X = x_i])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
$x_i P([X = x_i])$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$E(X) = \frac{3}{4}$
x_i^2	1	1	4	
$x_i^2 P([X = x_i])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{4}$	$E(X^2) = \frac{7}{4}$

Par conséquent , $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{7}{4} - \frac{9}{16} = \frac{28}{16} - \frac{9}{16} = \frac{19}{16}$

L'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{19}{16}}) = \frac{\sqrt{19}}{4}$

8.4 Une fonction de répartition incomplète

Soit une variable aléatoire réelle X telle que $X < \Omega >= \{1; 2; 3; 4\}$,.
La fonction de répartition F_X de X vérifie les données suivantes :

$$\begin{cases} F_X(\frac{3}{2}) = \frac{1}{8} \\ \\ F_X(x) = \frac{1}{2} \; si \; x \in [2;3[\\ \\ F_X(x) = \frac{3}{4} \; si \; x \in [3;4[\\ \end{cases}$$

Représenter graphiquement F_X puis déterminer la loi de probabilité de X.

Corrigé :
Comme $X < \Omega >= \{1; 2; 3; 4\}$, et que $\forall x \in \mathbb{R}$ $F(x) = P([X \leq x])$ on peut reconstituer la fonction de répartition

$$F : x \mapsto F(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x \in]-\infty; 1[\\ \frac{1}{8} \; si \; x \in [1;2[\\ \\ \frac{1}{2} \; si \; x \in [2;3[\\ \\ \frac{3}{4} \; si \; x \in [3;4[\\ \\ 1 \; si \; x \in [4; +\infty[\end{cases}$$

d'où

x_i	1	2	3	4	*total*
$P([X = x_i])$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	1

8.5 De la Fonction de répartition à l'Espérance

1. Soit une variable aléatoire X telle que $X < \Omega >= [|\ 1; n\ |]$ et soit F_X sa fonction de répartition.
   (a) Pour tout $k \in [|\ 1; n\ |]$ exprimer $P([X = k])$ à l'aide de $F_X(k)$.
   On distinguera deux cas : $k = 1$ et $k \geq 2$
   (b) Démontrer que pour tout $i \in [|\ 0; n-1\ |]$ alors $1 - F_X(i) = \sum_{j=i+1}^{n} P([X = j])$
   (c) En déduire que $E(X) = n - \sum_{k=1}^{n} F_X(k-1)$
2. On considère maintenant une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
   On tire 2 boules de cette urne et l'on note Y (respectivement Z) le plus grand (respectivement le plus petit) des numéros tirés.
   (a) Déterminer les univers-images $Y < \Omega >$ et $Z < \Omega >$.
   (b) Déterminer d'abord la fonction de répartition F_Y puis la loi de probabilité de Y.
   (c) Démontrer que $E(Y) = \dfrac{2(n+1)}{3}$
   (d) Soit $k \in Z < \Omega >$. Déterminer la valeur de $P([Z > k])$
   puis en déduire que $F_Z(k) = \dfrac{2nk - k^2 - k}{n(n-1)}$
   (e) Déterminer alors la loi de probabilité de Z puis démontrer que $E(Z) = \dfrac{n+1}{3}$

8.5.1 Corrigé

1. $X < \Omega >= \{1; 2; 3; 4; \cdots; n\} = [|\ 1; n\ |]$
   (a) Comme $\forall x \in \mathbb{R}\ F(x) = P([X \leq x])$ alors
   - si $k = 1$ on a $F(1) = P([X \leq 1]) = P([X \leq 1])$
   - Pour tout $k \in [|\ 2; n\ |]$, $F(k) - F(k-1) = P([X \leq k]) - P([X \leq k-1]) = P([X = k])$

   déterminer $P([X = k])$
   (b) Soit $i \in [|\ 0; n-1\ |]$ alors $1 - F_X(i) = 1 - P([X \leq i]) = P([X > i]) = \sum_{j=i+1}^{n} P([X = j])$
   (c) Donc

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
1 - F_X(0) = & P(X=1)+ & P(X=2)+ & P(X=3)+ & \cdots + & P(X=n-1)+ & P(X=n) \\
1 - F_X(1) = & & P(X=2)+ & P(X=3)+ & \cdots + & P(X=n-1)+ & P(X=n) \\
1 - F_X(2) = & & & P(X=3)+ & \cdots + & P(X=n-1)+ & P(X=n) \\
 & & & & & & \\
1 - F_X(n-2) = & & & & & P(X=n-1)+ & P(X=n) \\
1 - F_X(n-1) = & & & & & & P(X=n)
\end{array}\right|$$

   donc $n - \sum_{k=1}^{n} F_X(k-1) = P(X=1) + 2P(X=2) + 3P(X=3) + \cdots + nP(X=n) = E(X)$

2. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
On tire 2 boules sans remise et ceci de $\binom{n}{2}$ façons.
Soit Y le plus grand des numéros tirés.
   (a) $Y<\Omega>=[|\ 2;n\ |]$ donc la fonction de répartition F_Y de Y est constante sur les intervalles $]-\infty;2[;[2;3[;[2;3[;\cdots;[n-1;n[;[n;+\infty[$
   Il suffit alors pour la définir de calculer les $F_Y(k)$ pour tout $k\in[|\ 2;n\ |]$:
   $\forall k\in[|\ 2;n\ |]$ on a $F_Y(k)=P([Y\leq k])=P($"la plus grande des 2 boules est inférieure ou égale à k"$)=\dfrac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}}=\dfrac{\frac{k(k-1)}{2}}{\frac{n(n-1}{2}}=\dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$
   car on choisit 2 boules parmi les boules numérotées $1,2,\cdots,k$.
   Déterminons maintenant la loi de probabilité de Y
      i. $P([Y=2])=F_Y(2)=\dfrac{2}{n}$
      ii. $\forall k\in[|\ 3;n\ |]$ on a :
      $P([Y=k])=F_Y(k)-F_Y(k-1)=\dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}-\dfrac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)}=\dfrac{2(k-1)}{n(n-1)}$
      iii. La formule précédente peut englober le cas où $k=2$ donc
      $\forall k\in[|\ 2;n\ |]$ on a $P([Y=k])=\dfrac{2(k-1)}{n(n-1)}$
   (b) Bien que $Y<\Omega>=[|\ 2;n\ |]$ au lieu de $[|\ 1;n\ |]$ on peut faire comme si $Y<\Omega>=[|\ 1;n\ |]$ puisque il suffit de considérer que $F_Y(0)=0$
   Alors $E(Y)=n-\sum_{k=1}^{n}F_Y(k-1)=n-\sum_{k=0}^{n-1}F_Y(k)=n-\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$
   $=n-\dfrac{1}{n(n-1)}\sum_{k=0}^{n-1}(k^2-k)=n-\dfrac{1}{n(n-1)}[\sum_{k=0}^{n-1}k^2-\sum_{k=0}^{n-1}k]$
   $=n-\dfrac{1}{n(n-1)}[\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}-\dfrac{(n-1)n}{2}]=n-\dfrac{2n-1}{6}+\dfrac{1}{2}$
   $=\dfrac{6n-2n+1+3}{6}=\dfrac{4n+4}{6}=\dfrac{2(n+1)}{3}$
   (c) Soit Z le plus petit des numéros tirés donc $Z<\Omega>=[|\ 1;n-1\ |]$ $\forall k\in Z<\Omega>$ $P([Z>k])=P($"la plus petite des 2 boules est strictement supérieure à k"$)$
   $=\dfrac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}}$ car on choisit 2 boules parmi les boules numérotées $k+1,k+2,\cdots,n$.
   Or $P([Z>k]=1-P([Z\leq k])=1-F_Z(k)$ donc $\forall k\in Z<\Omega>$ $F_Z(k)=1-P([Z>k]=1-\dfrac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}}$
   $=1-\dfrac{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}}=\dfrac{n(n-1)-(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}$

$= \dfrac{n^2 - n - n^2 + nk + n + kn - k^2 - k}{n(n-1)} = \dfrac{2nk - k^2 - k}{n(n-1)}$

(d) i. $P([Z=1]) = F_Z(1) = \dfrac{2}{n}$

ii. $\forall k \in [|\ 2; n-1\ |]$ on a :

$P([Z=k]) = F_Z(k) - F_Z(k-1) = \dfrac{2nk - k^2 - k}{n(n-1)} - \dfrac{2n(k-1) - (k-1)^2 - (k-1)}{n(n-1)} =$
$\dfrac{2nk - k^2 - k - 2nk + 2n + k^2 - 2k + 1 - k - 1}{n(n-1)} = \dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$

iii. La formule précédente peut englober le cas où $k = 1$ donc

$\forall k \in [|\ 2; n\ |]$ on a $P([Z=k]) = \dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$

(e) Comme $Z < \Omega >= [|\ 1; n-1\ |]$

Alors $E(Z) = (n-1) - \sum_{k=1}^{n-1} F_Z(k-1) = (n-1) - \sum_{k=0}^{n-2} F_Z(k) = (n-1) - \sum_{k=0}^{n-2} \dfrac{2nk - k^2 - k}{n(n-1)}$

$= (n-1) - \sum_{k=0}^{n-2} \dfrac{(2n-1)k - k^2}{n(n-1)} = (n-1) - \dfrac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-2} (2n-1)k - k^2$

$= (n-1) - \dfrac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-2} (2n-1)k + \dfrac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-2} k^2$

$= (n-1) - \dfrac{2n-1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-2} k + \dfrac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-2} k^2$

$= (n-1) - \dfrac{2n-1}{n(n-1)} \dfrac{(n-2)(n-1)}{2} + \dfrac{1}{n(n-1)} \dfrac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}$

$= (n-1) - \dfrac{(2n-1)(n-2)}{2n} + \dfrac{(n-2)(2n-3)}{6n}$

$= \dfrac{6n(n-1) - 3(2n-1)(n-2) + (n-2)(2n-3)}{6n} = \dfrac{2n^2 + 2n}{6n} = \dfrac{n+1}{3}$

8.6 Fluidité de la circulation automobile

Soit X le nombre de voitures qui passent entre 17 h et 18 h en un point donné d'une autoroute. On a observé que le nombre moyen de voitures est $E(X) = 4000$ et que $Var(X) = 100000$. Déterminer un minorant de la probabilité de l'événement suivant : $3500 < X < 4500$

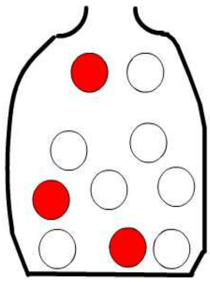
8.6.1 Corrigé

$P(3500 < X < 4000) = P(-500 < X - m < 500) = P([\mid X - m \mid < 500])$ D'après l'inégalité de Bienaimé-Tchebichev, on a : $\forall k > 0 \;\; P([\mid X - m \mid < k]) \geq 1 - \dfrac{\sigma^2}{k^2}$

donc $P([\mid X - m \mid < 500]) \geq 1 - \dfrac{100000}{500^2}$ d'où $P(3500 < X < 4000) \geq \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5} \approx 60\%$.

On en déduit que $\boxed{P(3500 < X < 4000) \geq \dfrac{3}{5}}$

8.7 Estimation à l'aide de BienAymé-Tchebychev



Une urne contient 10 boules dont 3 rouges.
Une épreuve consiste à tirer une boule.
On procède à 10 tirages avec remise.
Soit X le nombre de boules rouges obtenues en 10 tirages.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
   Rappeler alors les valeurs de $m = E(X)$ et de $\sigma(X)$
2. Estimer $P([|X - m| \geq 2\sigma])$
3. Calculer $P([|X - m| \geq 2\sigma])$

8.7.1 Corrigé

1. On est en présence d'un schéma de Bernoulli :
   10 épreuves répétées, identiques et indépendantes.
   Au cours d'une épreuve, on a
   soit un succès :"obtenir une boule rouge" avec une probabilité $p = \dfrac{3}{10}$
   soit un échec :"ne pas obtenir une boule rouge" avec une probabilité $q = 1 - p = \dfrac{7}{10}$
   Alors X = nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; \dfrac{3}{10})$.
   Par conséquent $E(X) = np = 3$ et $Var(X) = npq = 3\dfrac{7}{10} = \dfrac{21}{10} = 2,1$ et $\sigma(X) = \sqrt{2,1} \approx 1,45$
2. En utilisant la Forme 4 de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev
   $\forall k > 0 \;\; P([\mid X - m \mid \geq k\,\sigma]) \leq \dfrac{1}{k^2}$
   On peut donc estimer que $P([\mid X - 3 \mid \geq 2\,\sigma]) \leq \dfrac{1}{4}$
3. En réalité $\mid X - 3 \mid \geq 2\,\sigma \Longleftrightarrow \mid X - 3 \mid \geq 2,90 \Longleftrightarrow X - 3 \leq -2,90 \; ou \; X - 3 \geq 2,90$
   $\Longleftrightarrow X \leq 0,10 \; ou \; X \geq 5,90 \Longleftrightarrow X = 0 \; ou \; X = 6 \; ou \; X = 7 \; ou \; X = 8 \; ou \; X = 9 \; ou \; X = 10$
   Tous ces événements étant disjoints deux à deux alors
   $P([\mid X - m \mid \geq k\,\sigma])$
   $= P([X = 0]) + P([X = 6]) + P([X = 7]) + P([X = 8]) + P([X = 9]) + P([X = 10])$
   $= 0,0282 + 0,0368 + 0,0090 + 0,0014 + 0,0001 + 0,00005$
   $= 0,07555$

8.8 Majoration d'une probabilité

On jette n fois un dé. Comment peut-on choisir n pour que le nombre de 6 obtenus soit compris entre 0 et $\dfrac{n}{3}$ avec une probabilité au moins égale à $0,9$?

8.8.1 Corrigé

On est en présence d'un schéma de Bernoulli :
n épreuves répétées, identiques et indépendantes.
Au cours d'une épreuve, on a
soit un succès :"obtenir 6" avec une probabilité $p = \dfrac{1}{6}$
soit un échec :"ne pas obtenir 6" avec une probabilité $q = 1 - p = \dfrac{5}{6}$
Alors $X =$ nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; \dfrac{1}{6})$.
Par conséquent $E(X) = np = \dfrac{n}{6}$ et $Var(X) = npq = n \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5n}{36}$
$P([0 \leq X \leq \dfrac{n}{3}]) = P([0 - \dfrac{n}{6} \leq X - \dfrac{n}{6} \leq \dfrac{n}{3} - \dfrac{n}{6}]) = P([-\dfrac{n}{6} \leq X - m \leq \dfrac{n}{6}]) = P([\mid X - m \mid \leq \dfrac{n}{6}])$
On utilisa alors la Forme 2 de l'inégalité de BienAymé - Tchebychev :
$\forall t > 0 \;\; P([\mid X - m \mid \leq t]) \geq 1 - \dfrac{\sigma^2}{t^2}$
On en déduit que $P([0 \leq X \leq \dfrac{n}{3}]) \geq 1 - \dfrac{\sigma^2}{t^2}$ donc $P([0 \leq X \leq \dfrac{n}{3}]) \geq 1 - \dfrac{\frac{5n}{36}}{\frac{n^2}{36}} = 1 - \dfrac{5}{n}$
Par conséquent, pour que cette probabilité soit au moins égale à $0,9$ il suffit de choisir n tel que :
$1 - \dfrac{5}{n} \geq 0,9 \Longleftrightarrow 0,1 \geq \dfrac{5}{n} \Longleftrightarrow n \geq \dfrac{5}{0,1} \Longleftrightarrow n \geq 50$

8.9 Sécurité aérienne

Un avion long courrier peut transporter 100 passagers et leurs bagages. Il pèse 120 tonnes sans passagers ni bagages mais équipages compris et plein de carburant effectué. Les consignes de sécurité interdisent au commandant de bord de décoller si le poids total de l'appareil chargé est supérieur ou égal à 129,42 tonnes. Les 100 places sont réservées.
Le poids d'un voyageur X_i suit une loi d'espérance mathématique $E(X_i) = 70\ kg$ et d'écart-type $\sigma(X_i) = 10\ kg$.
Le poids de ses bagages Y_i suit une loi d'espérance mathématique $E(Y_i) = 20\ kg$ et d'écart-type $\sigma(Y_i) = 10\ kg$.
Toutes les variables X_i et Y_i sont supposées indépendantes.

1. Soit P le poids total de l'appareil au moment du décollage.
   L'espérance mathématique de P est-elle conforme aux consignes de sécurité ?
2. Calculer $\sigma(P)$.
3. Déterminer un majorant de la probabilité pour que le poids réel dépasse 129,42 tonnes

8.9.1 Corrigé

1. Soit P le poids total de l'appareil au moment du décollage.
   $P = 120000 + X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100}$ donc
   $E(P) = E(120000 + X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100})$
   En utilisant la linéarité de l'espérance, on obtient :
   $E(P) = E(120000) + 100E(X_i) + 100E(Y_i) = 120000 + 100 \times 70 + 100 \times 20 = 129000\ kg = 129\ tonnes$ L'espérance mathématique de P est conforme aux consignes de sécurité car $129\ tonnes < 129,42\ tonnes$
2. $P = 120000 + X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100}$ donc
   $Var(P) = Var(120000 + X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100}) = Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100})$
   En utilisant le fait que tous les X_i et les Y_i sont mutuellement indépendants, on obtient :
   $Var(P) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_{100}) + Var(Y_1) + Var(Y_2) + \cdots + Var(Y_{100}) = 100Var(X_i) + 100Var(Y_i) = 100 \times 100 + 100 \times 100 = 20000$
   donc $\sigma(P) = \sqrt{20000} = 100\sqrt{2} = 141\ kg$.
3. $Pr(P > 129420) = Pr(P - E(P) > 129420 - E(P))$
   $Pr(P - E(P) > 129420 - 129000) = Pr(P - E(P) > 420) \leq \dfrac{Var(P)}{420^2} = \dfrac{20000}{176400} \approx 0,1133$
   donc un majorant de la probabilité pour que le poids réel dépasse 129,42 tonnes est 11%