Espaces vectoriels

Christian CYRILLE

4 mai 2017

1 Définition

Soit E un ensemble muni d'une loi interne $+$ et d' une loi externe . à gauche dont le domaine d'opérateurs est $\mathbb{R}$ en l'occurrence la multiplication par un réel .

$$+ : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array}$$

$$. : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,u) & \longmapsto & \lambda.u \end{array}$$

On dit que $(E,+,.)$ est un espace vectoriel réel (on le notera alors $\vec{E}$ et ses éléments seront appelés des vecteurs et se noteront $\vec{u},\vec{v},\cdots$ lorsque :

1. $(\vec{E},+)$ a une structure de groupe commutatif c'est-à-dire que la loi $+$ vérifie les 4 propriétés suivantes :
   (a) A : $+$ est associative : $\forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \forall \vec{v} \in \vec{E} \quad \forall \vec{w} \in \vec{E} \quad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
   (b) N : $\vec{E}$ admet un élément neutre pour $+$ appelé vecteur nul $\vec{0}$:
   $\forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \vec{u}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{u} = \vec{u}$
   (c) S : tout élément $\vec{u}$ de $\vec{E}$ admet un élément symétrique noté $(-\vec{u}\,)$ pour $+$:
   $\vec{u}+(-\vec{u}) = (-\vec{u})+\vec{u} = \vec{0}$
   (d) C : $+$ est commutative :
   $\forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \forall \vec{v} \in \vec{E} \quad \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$
2. la multiplication par un réel . vérifie les 4 propriétés suivantes :
   (a) P1 : $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \forall \vec{v} \in \vec{E} \quad \lambda.(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda.\vec{u}+\lambda.\vec{v}$
   (b) P2 : $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u} \in \vec{E} \quad (\lambda+\mu).\vec{u} = \lambda.\vec{u}+\mu.\vec{u}$
   (c) P3 : $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \lambda.(\mu.\vec{u}) = (\lambda\mu).\vec{u}$
   (d) P4 : $\forall \vec{u} \in \vec{E} \quad 1.\vec{u} = \vec{u}$

2 Autres règles de calcul

On en déduit 9 autres règles de calcul qui sont valables dans un espace vectoriel $\vec{E}$:

1. $\forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \forall \vec{v} \in \vec{E} \quad \forall \vec{w} \in \vec{E} \quad \vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w} \iff \vec{u} = \vec{v}$
2. $\forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \forall \vec{v} \in \vec{E} \quad \exists \vec{w} \in \vec{E} \quad \vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$
   c'est $\vec{w} = \vec{v} + (-\vec{u})$ qu'on note $\vec{v} - \vec{u}$
3. $\forall \vec{u} \in \vec{E} \quad 0.\vec{u} = \vec{0}$
4. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda.\vec{0} = \vec{0}$
5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} \in \vec{E}$ alors on a :
   $\lambda.\vec{u} = \vec{0} \iff \lambda = 0 \quad ou \quad \vec{u} = \vec{0}$
6. $\forall \vec{u} \in \vec{E} \quad (-1)\vec{u} = -\vec{u}$
7. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u} \in \vec{E} \quad (-\lambda).\vec{u} = -(\lambda.\vec{u}) = \lambda.(-\vec{u})$
8. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \forall \vec{v} \in \vec{E} \quad \lambda.\vec{u} = \lambda.\vec{v} \iff \lambda = 0 \quad ou \quad \vec{u} = \vec{v}$
9. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \lambda.\vec{u} = \mu.\vec{u} \iff \lambda = \mu \quad ou \quad \vec{u} = \vec{0}$

2.1 5 Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

1. Soit l'ensemble $\vec{P}$ des vecteurs du plan P, $(\vec{P}, +, .)$ est un espace vectoriel réel
   - un vecteur est un vecteur du plan
   - $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$ où A est un point quelconque du plan P.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (\mathbb{R}^n, +, .)$ est un espace vectoriel réel.
   - un vecteur est un $n-$uplet
   - $\vec{0} = (0, 0, \cdots, 0)$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad (M_{n,p}(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel réel
   - un vecteur est une matrice de format (n, p)
   - $\vec{0} =$ la matrice nulle O.
4. Soit l'ensemble $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ des applications de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, Alors $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel réel
   - un vecteur est une application $\begin{array}{rccc} f : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$
   - $\vec{0} =$ l'application nulle

   $$\begin{array}{rccc} \theta : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \theta(x) = 0 \end{array}$$
5. Soit l'ensemble $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ des suites de nombres réels définies sur $D \subset \mathbb{N}$, Alors $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel réel
   - un vecteur est une suite $(u_n)_{n \in D}$
   - $\vec{0} =$ la suite nulle $n \mapsto 0$ définie sur D

3 Autres espaces vectoriels particuliers

3.1 Cas d'un corps $\mathbb{K}$

1. Tout corps $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel en prenant comme loi externe la loi $\times$
2. Tout corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}_1$-espace vectoriel si $\mathbb{K}_1$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$ en prenant comme loi externe : $\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K} \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \times \beta$

3.2 Corollaire

1. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
3. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel
4. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel

4 Sous-espaces vectoriels

4.1 Définition

Soit un espace vectoriel $\vec{E}$. Soit $\vec{F}$ une partie **non vide** de $\vec{E}$.
Alors on dira que $\vec{F}$ est un sous espace vectoriel de $\vec{E}$ lorsque la restriction de la loi $+$ à $\vec{F} \times \vec{F}$ et la restriction de la multiplication par un réel à $\mathbb{R} \times \vec{F}$ confèrent à $\vec{F}$ une structure d'espace vectoriel

4.2 Théorème caractéristique

$(\vec{F}, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$
$\Longleftrightarrow$

1. $p_1 : \vec{F} \neq \emptyset$
2. p_2 : $\vec{F}$ est stable pour $+$
   c'est-à-dire $\forall \vec{u} \in \vec{F} \quad \forall \vec{v} \in \vec{F} \quad \vec{u} + \vec{u} \in \vec{F}$
3. p_3 : $\vec{F}$ est stable pour la multiplication par un réel
   c'est-à-dire $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{v} \in \vec{F} \quad \lambda \vec{u} \in \vec{F}$

$\Longleftrightarrow$

1. $p_1 : \vec{F} \neq \emptyset$
2. p'_2 :$\vec{F}$ est stable par combinaison linéaire
   c'est-à-dire $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u} \in \vec{F} \quad \forall \vec{v} \in \vec{F} \quad \lambda \vec{u} + \mu \vec{u} \in \vec{F}$

4.3 Remarque pratique

4.3.1 Lemme :

Dans un groupe, l'élément neutre est unique

4.3.2 Corollaire :

Si $\vec{F}$ est un sous espace vectoriel de $\vec{E}$ alors son vecteur nul $\vec{0}$ est le même que celui de $\vec{E}$

4.3.3 Stratégie pour la mise en œuvre du théorème caractéristique des sev

Pour démontrer que $(\vec{F},+,.)$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$, il est pratique de procéder ainsi :
Pour prouver que $\vec{F} \neq \emptyset$ on cherche simplement à démontrer que $\vec{0} \in \vec{F}$
Si $\vec{0}_E \notin \vec{F}$ alors $\vec{F}$ n'est pas un sous-espace vectoriel sinon on cherche alors à prouver soit p_2 et p_3 soit tout simplement p_2'

4.4 Un sous-espace vectoriel particulier à savoir repérer

L'ensemble des combinaisons linéaires de n vecteurs $(\vec{e_1},\vec{e_2},\cdots,\vec{e_n})$ de $\vec{E}$ c'est-à-dire $\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\vec{e_k}/\forall k \in [|1;n|]\lambda_k \in \mathbb{R}\}$ est un sous espace vectoriel de $\vec{E}$ appelé le sous espace vectoriel engendré par $(\vec{e_1},\vec{e_2},\cdots,\vec{e_n})$ et noté $Vect(\vec{e_1},\vec{e_2},\cdots,\vec{e_n})$

5 Propriétés d'une famille finie de vecteurs

5.1 Famille génératrice

soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n})$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel $\vec{E}$ Alors : $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n})$ est une famille génératrice de $\vec{E}$(ou engendre $\vec{E}$) lorsque le sous-espace vectoriel engendré par $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n})$ noté $Vect(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n})$ c'est-à-dire que tout vecteur $\vec{u}$ de $\vec{E}$ est combinaison linéaire de $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n})$ c'est-à-dire $\forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \exists (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \vec{u} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{e_k}$

5.2 Exemples de familles génératrices

5.2.1 Fonctions linéaires

l'ensemble des fonctions linéaires est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par la fonction : $Id_{\mathbb{R}} \ : x \mapsto x$

5.2.2 Fonctions affines

l'ensemble des fonctions affines est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par la famille des 2 fonctions : $UN \ : x \mapsto 1$ et $Id_{\mathbb{R}} \ : x \mapsto x$

5.2.3 Fonctions polynômes de degré ≤ 2

l'ensemble des fonctions polynômes de degré ≤ 2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par la famille des 3 fonctions : $UN \ : x \mapsto 1$; $Id_{\mathbb{R}} \ : x \mapsto x$; $CARRE \ : x \mapsto x^2$

5.2.4 $\mathbb{R}$

l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ est engendré par 1.

5.2.5 $\mathbb{R}^2$

l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est engendré par la famille $((1,0)\ ;(0,1))$

5.2.6 $\mathbb{R}^3$

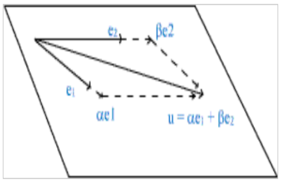
l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est engendré par la famille $((1,0,0)\ ;(0,1,0),(0,0,1)$

5.2.7 $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est engendré par la famille des 4 matrices $(E_{1,1}E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ où $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

5.2.8 Plan vectoriel $\vec{P}$

l'espace vectoriel $\vec{P}$ des vecteurs du plan P est engendré par la famille formée de 2 vecteurs non colinéaires c'est-à-dire non nuls et de directions différentes.



6 Famille libre, famille liée

Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n})$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel $\vec{E}$
Alors on dira que :

1. $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n})$ est une famille libre de $\vec{E}$
(ou $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n})$ sont linéairement indépendants) lorsque toute combinaison linéaire nulle de ces vecteurs implique que tous les coefficients sont tous nuls.
c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{e_k} = \vec{0} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$
2. $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n})$ est une famille liée de $\vec{E}$
(ou $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n})$ sont linéairement dépendants) lorsqu'il existe au moins une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs avec au moins un coefficient non nul.
c'est-à-dire $\exists \alpha_k \neq 0 \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{e_k} = \vec{0}$

6.1 Propriétés des familles libres et des familles liées

6.1.1 P_1

Toute famille de vecteurs contenant $\vec{0}$ est liée

6.1.2 P_2

Toute famille de vecteurs contenant au moins deux fois le $\vec{u}$ est liée

6.1.3 P_3

Toute famille de vecteurs contenant au moins une fois $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ est liée

6.1.4 P_4

Toute sous-famille d'une famille libre est libre

6.1.5 P_5

Toute sur-famille d'une famille liée est liée

6.1.6 P_6

Une famille formée d'un seul vecteur $\vec{u}$ est libre $\iff$ ce vecteur est $\neq \vec{0}$

6.1.7 P_7

Si la famille $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n})$ est liée alors l'un au moins des $\vec{e_k}$ est combinaison linéaire des n˘1 autres

6.2 Exemples de familles libres

6.2.1 Fonctions linéaires

l'ensemble des fonctions linéaires est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et la famille formée par la fonction $Id_{\mathbb{R}} \ : x \mapsto x$ est une famille libre.

6.2.2 Fonctions affines

l'ensemble des fonctions affines est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et la famille des 2 fonctions : $UN \ : x \mapsto 1$ et $Id_{\mathbb{R}} \ : x \mapsto x$ est libre.

6.2.3 Fonctions polynômes de degré ≤ 2

l'ensemble des fonctions polynômes de degré ≤ 2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et la famille des 3 fonctions : $UN \ : x \mapsto 1$; $Id_{\mathbb{R}} \ : x \mapsto x$; $CARRE \ : x \mapsto x^2$ est libre.

6.2.4 $\mathbb{R}$

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ la famille formée de 1 est une famille libre.

6.2.5 $\mathbb{R}^2$

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ la famille formée de $((1,0) \ ; (0,1))$ est une famille libre.

6.2.6 $\mathbb{R}^3$

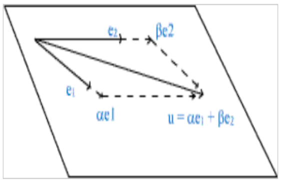
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ la famille formée de $((1,0,0) \ ; (0,1,0), (0,0,1)$ est une famille libre.

6.2.7 $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ la famille des 4 matrices $(E_{1,1}E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est libre avec $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

6.2.8 Plan vectoriel $\vec{P}$

Dans l'espace vectoriel $\vec{P}$ des vecteurs du plan P, la famille formée de 2 vecteurs non colinéaires c'est-à-dire non nuls et de directions différentes est libre.



7 Bases

Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n})$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel $\vec{E}$
Alors : $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n})$ est une base de $\vec{E}$
$\iff$ $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n})$ est une famille libre et génératrice de $\vec{E}$
$\iff$ tout vecteur $\vec{u}$ de $\vec{E}$ est combinaison linéaire unique de $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n})$
$\iff \exists! \alpha_1 \in \mathbb{R} \quad \exists! \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad \cdots \exists! \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \vec{u} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{e_k}$
On dit alors que
le vecteur $\vec{u}$ a pour composantes scalaires $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n})$.
Cela s'écrit $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

7.1 Propriétés

7.1.1 P_8

Aucune base ne peut contenir le vecteur nul $\vec{0}$

7.1.2 P_9

Aucune base ne peut contenir deux fois le même vecteur $\vec{u}$

7.1.3 P_{10}

> Aucune base ne peut contenir à la fois le vecteur $\vec{u}$ et son opposé le vecteur $-\vec{u}$

7.1.4 P_{11} :Théorème FLG

> Dans un espace vectoriel $\vec{E}$, le nombre d'éléments de n'importe quelle famille libre finie $\mathcal{L}$ de $\vec{E}$ est inférieur ou égal au nombre d'éléments de n'importe quelle famille génératrice finie $\mathcal{G}$ de $\vec{E}$

7.1.5 P_{12} : Corollaire du théorème FLG

> Dans un espace vectoriel $\vec{E}$, s'il existe une base $\mathcal{B}$ de n éléments Alors
> 1. toute famille de plus de n éléments de $\vec{E}$ est liée.
> 2. Il existe une infinité de bases dans $\vec{E}$
> 3. Toutes ces bases ont le même nombre d'éléments : n
>
> Cet entier naturel n s'appelle alors la dimension de $\vec{E}$. On écrit alors $dim(\vec{E}) = n$

7.1.6 Convention

> $\{\vec{0}\}$ est un sous-espace vectoriel de n'importe quel espace vectoriel . $\{\vec{0}\}$ ne peut avoir de base mais on lui donne quand même une dimension : la dimension 0 donc $dim(\{\vec{0}\}) = 0$.
> On admet que $\mathcal{L} = \emptyset$ est une famille libre de $\{\vec{0}\}$.

7.1.7 P_{13} : 3 **équivalences fondamentales en dimension finie** n

> Dans un espace vectoriel $\vec{E}$ de dimension n Alors :
> 1. Si une famille de n vecteurs de $\vec{E}$ est libre alors elle est génératrice donc est une base de $\vec{E}$.
> 2. Si une famille de n vecteurs de $\vec{E}$ est génératrice alors elle est libre donc est une base de $\vec{E}$.
>
> Par conséquent , si $dim(\vec{E}) = n$, on a :
>
> Une famille de n vecteurs est libre dans $\vec{E}$ $\iff$ cette famille de n éléments est génératrice dans $\vec{E}$ $\iff$ cette famille de n éléments est une base de $\vec{E}$

7.1.8 P_{14} : Corollaire 1

> Si $\vec{E}$ est un espace vectoriel de dimension n
> Si $\vec{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$
> Alors $\vec{F}$ est de dimension finie et $dim(\vec{F}) \leq dim(\vec{E})$

7.1.9 P_{15} :Corollaire 2

Si $\vec{E}$ est un espace vectoriel de dimension n
Si $\vec{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$
Si $dim(\vec{F}) = dim(\vec{E})$
Alors $\vec{F} = \vec{E}$

7.2 Exemples de bases canoniques

7.2.1 Fonctions linéaires

L'ensemble des fonctions linéaires est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension 1 car la famille formée par la fonction $Id_{\mathbb{R}} \ : x \mapsto x$ est une base

7.2.2 Fonctions affines

l'ensemble des fonctions affines est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension 2 car la famille des 2 fonctions : $UN \ : x \mapsto 1$ et $Id_{\mathbb{R}} \ : x \mapsto x$ est une base

7.2.3 Fonctions polynômes de degré ≤ 2

l'ensemble des fonctions trinômes est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension 3 car la famille des 3 fonctions : $UN \ : x \mapsto 1$; $Id_{\mathbb{R}} \ : x \mapsto x$; $CARRE \ : x \mapsto x^2$ est une base

7.2.4 $\mathbb{R}_n[X]$

Le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ formé du polynôme nul et des polynômes de degré $\leq n$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes.
Comme la famille $(1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ alors $dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$

7.2.5 $\mathbb{R}$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ est de dimension 1 car la famille formée de 1 est une base de $\mathbb{R}$

7.2.6 $\mathbb{R}^2$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2 car la famille formée de $((1, 0) \ ; (0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$

7.2.7 $\mathbb{R}^3$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 car la famille formée de $((1, 0, 0) \ ; (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$

7.2.8 $\mathbb{R}^n$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension n car la famille formée des n n-uplets $((1, 0, 0, \ldots 0) \ ; (0, 1, 0, 0, \ldots., 0), \cdots, (0, 0, 0, \ldots\ldots.., 1))$ est une base de $\mathbb{R}^n$

7.2.9 $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

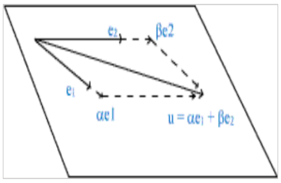
L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est de dimension 4 car la famille des 4 matrices $(E_{1,1}E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est une base.

7.2.10 $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension np car la famille formée des np matrices $(E_{i,j})$ où $i \in [|1\,;n|]$ et $j \in [|1\,;p|]$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
$(E_{i,j})$ est une matrice dont tous les termes sont nuls sauf celui qui est à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est 1

7.2.11 $\vec{P}$

L'espace vectoriel $\vec{P}$ des vecteurs du plan P est de dimension 2 car la famille formée de 2 vecteurs non colinéaires c'est-à-dire non nuls et de directions différentes est une base de $\vec{P}$



7.3 Théorème de la base incomplète

1. **En dimension** 2 :
   Soit $\vec{P}$ un plan vectoriel. Si $\vec{u} \in \vec{P} - \{\vec{0}\}$ alors $\exists \vec{v} \in \vec{P} - \{\vec{0}\}$ tel que la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ forme une base de $\vec{P}$
2. **En dimension** 3 **:**
   Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel de dimension 3.
   - Si la famille $(\vec{u}, \vec{v}))$ est libre alors $\exists \vec{v} \in \vec{E} - \{\vec{0}\}$ tel que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base de $\vec{E}$.
   - Si $\vec{u} \in \vec{E} - \{\vec{0}\}$ alors $\exists (\vec{v}, \vec{w}) \in \vec{E} - \{\vec{0}\} \times \vec{E} - \{\vec{0}\}$ tel que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base de $\vec{E}$.
3. **En dimension** n **:**
   Si $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_p})$ est une famille libre de $\vec{E}$ alors il existe $(n-p)$ vecteurs $(\vec{e_{p+1}}, \vec{e_{p+2}}, \cdots, \vec{e_n})$ tels que la famille $((\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_p}, \vec{e_{p+1}}, \vec{e_{p+2}}, \cdots, \vec{e_n})$ soit une base de $\vec{E}$

7.3.1 Démonstration en dimensions 2 et 3

1. Comme $dim(\vec{P}) = 2$ alors choisissons un vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$ non colinéaire à $\vec{u}$. Ce vecteur existe car $\vec{P} \neq \vec{D}_{\vec{u}}$. Dans ce cas la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre en dimension 2 donc est une base de $\vec{P}$.CQFD.

2. • Comme $dim(\vec{E}) = 3$ choisissons un vecteur $\vec{w} \notin \vec{P}_{\vec{u},\vec{v}}$. Ce vecteur existe car $\vec{E} \neq \vec{P}_{\vec{u},\vec{v}}$. Alors la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est forcément libre sinon $\vec{w} \in \vec{P}_{\vec{u},\vec{v}}$. Cette famille libre de 3 vecteurs sen dimension 3 est donc une base de $\vec{E}$.CQFD
   • Comme $dim(\vec{E}) = 3$ choisissons un vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$ non colinéaire à $\vec{u}$. Ce vecteur existe car $\vec{E} \neq \vec{D}_{\vec{u}}$. Choississons ensuite un vecteur $\vec{w} \notin \vec{P}_{\vec{u},\vec{v}}$. Ce vecteur existe car $\vec{E} \neq \vec{P}_{\vec{u},\vec{v}}$. Alors la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est forcément libre sinon $\vec{w} \in \vec{P}_{\vec{u},\vec{v}}$. Cette famille libre de 3 vecteurs sen dimension 3 est donc une base de $\vec{E}$.CQFD

7.4 Théorème sur les composantes scalaires

Soit un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n})$.

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ alors

- $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \cdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \vec{u} \begin{pmatrix} \lambda\ \alpha_1 \\ \lambda\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \lambda\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda\ \vec{u} + \mu \vec{v} \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 + \mu\ \beta_1 \\ \lambda\ \alpha_2 + \mu\ \beta_2 \\ \cdots \\ \lambda\ \alpha_n \alpha_n + \mu\ \beta_N \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

7.4.1 Démonstration

Démonstrations évidentes.

8 Exercices

8.1 Exercice

Démontrer que les ensembles suivants ne sont pas des espaces vectoriels :

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 1\}$
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 3\}$
3. $F = \{f \in F(\mathbb{R}; \mathbb{R}) / f(0) = 1\}$

8.2 Exercice

Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (a+1)x + (a-1)y + 2a^3 - a^2 + 3a - 4 = 0\}$ où a est un paramètre réel.

1. Déterminer une condition nécessaire sur a pour que F soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Cette condition nécessaire est-elle suffisante ?
3. Conclusion ?

8.3 Exercice

Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels en utilisant 2 méthodes :

- le théorème caractéristique d'un sous espace vectoriel
- la méthode du sous-espace vectoriel engendré. Dans ce cas, il faudra vérifier ensuite que la famille génératrice trouvée est libre donc est une base du sous espace vectoriel

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - y = 0\}$
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$
3. $F =$ l'ensemble formé de la fonction nulle et des fonctions polynômes de degré $\leq n$
4. $F = \{\begin{pmatrix} a+b & -2a+b \\ b & 3a+b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

8.4 Exercice

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ centré en O et soit E l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur D.

1. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions numériques paires définies sur D est un sous-espace vectoriel de E
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions numériques impaires définies sur D est un sous-espace vectoriel de E
3. Démontrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{$ la fonction nulle définie sur $D\}$

Conclusion : On dira que l'espace vectoriel E est somme directe des sous-espaces vectoriels P et I et on note $E = \mathcal{P} \bigoplus \mathcal{I}$.

8.5 Exercice

Soit l'espace vectoriel $E = (\mathbb{R}^3, +, .)$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = ((1,0,0); (0,1,0); (0,0,1))$

1. La famille $\mathcal{F} = (a_0; a_1)$ où $a_0 = (1,1,1)$ et $a_1 = (1,2,1)$ est -elle une famille génératrice de E
2. La famille $\mathcal{F} = (e_1; e_2; e_3)$ où $e_1 = (0,1,1); e_2 = (1,0,1)$ et $e_3 = (1,1,0)$ est -elle une famille génératrice de E
3. Soit la famille $\mathcal{F} = (b_1; b_2; b_3, a_0)$ où $b_1 = (-1,0,0); b_2 = (0,-1,0)$ et $b_3 = (0,0,-1)$
   (a) F est-elle libre ?
   (b) Montrer que F engendre E.
   (c) Peut-on imposer aux coefficients $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_0)$ de la combinaison linéaire relative à tout vecteur u pour la famille $(b_1; b_2; b_3, a_0)$ la relation suivante :$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 3\alpha_0$?

8.6 Famille libre

> eercice dans vuibert bleu algèbre

8.7 Famille libre

Soit une famille de réels distincts deux à deux (x_k)

8.8 Famille libre

> exercice dans vuibert bleu algèbre

8.9 Réunion de sous espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}-ev$.

1. Soient E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E.
   Démontrer que $E = E_1 \cup E_2$ est un sous espace vectoriel de $E \iff E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$
2. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $card(K) \geq p \geq 2$. Soient $E_1, E_2, \cdots, E_p$ des sous espaces vectoriels de E.
   Démontrer que $F = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ est un sous espace vectoriel de $E \iff$ l'un des E_i contient tousles autres.
3. Donner un exemple d'espace vectoriel E réunion de trois sous espaces vectoriels tous distincts de E

8.9.1 Corrigé

1. - $\Longleftarrow$:
     Si $E_1 \subset E_2$ alors $E = E_1 \cup E_2 = E_2$ donc est un sous espace vectoriel.
     Démonstration analogue si $E_2 \subset E_1$
   - $\Longrightarrow$:
     Si $E = E_1 \cup E_2$ est un sous espace vectoriel, raisonnons par l'absurde.
     Supposons que E_1 n'est pas inclus dans E_2 et que E_2 n'est pas inclus dans E_1.
     Donc $\exists x_1 \in E_1$ et $x_1 \notin E_2$ et $\exists x_2 \in E_2$ et $x_2 \notin E_1$.
     Soit $y = x_1 + x_2$. Comme $x_1 \in E_1$ alors $x_1 \in E$. De même, $x_2 \in E_2$ alors $x_2 \in E$. Par conséquent $y \in E$.
     Mais alors
     — ou bien $y \in E_1$ mais alors $x_2 = y - x_1 \in E_1$. Impossible.
     — ou bien $y \in E_2$ mais alors $x_1 = y - x_2 \in E_1$. Impossible.
     Par conséquent $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$
2. - $\Longleftarrow$: évident
   - $\Longrightarrow$:
     On va démontrer ceci par récurrence :
     — initialisation : vraie au rang $p = 2$. Ceci a tété prouvé à la question précédente.
     — hérédité : supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang $p-1$ avec $3 \leq p \leq Card(\mathbb{K})$
       — ou bien $E_1 \cup E_2 \cdots E_{p-1} \subset E_p$ alors $E = E_p$ donc est un sous espace vectoriel.
       — ou bien $E_p \subset E_1 \cup E_2 \cdots E_{p-1}$ alors on applique l'hypothèse de récurrence à $F = E_1 \cup E_2 \cdots E_{p-1}$.
         Comme F les contient tous ...
       — ou bien aucune de ces deux hypothèses n'est vraie ,
         Soit $F = E_1 \cup E_2 \cdots E_{p-1}$ on choisit $x \in F$ et $x \notin E_p$ et $y \in E_p$ et $y \notin F$.
         Alors $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad x - \lambda y \in F$ et $x - \lambda y \notin E_p$ sinon $x \in E_p$.
         Par conséquent, $\exists i_\lambda \in \{1, 2, \cdots p-1\}$ tel que $x - \lambda y \in E_{i_\lambda}$.
         L'application $\lambda \mapsto i_\lambda$ de $\mathbb{K}$ dans $\{1, 2, \cdots p-1\}$ est défine.
         Elle est injective car $i_\lambda = i_\mu \Longrightarrow x - \lambda y \in E_{i_\lambda}$ et $x - \lambda y \in E_{i_\mu}$.
         Si $\lambda \neq \mu$ alors $(\lambda - \mu)y \in E_{i_\lambda}$ donc $y \in E_{i_\lambda}$. Ceci est impossible car $Card(\mathbb{K}) \geq p$.
         Il y a donc une contradiction.

— Conclusion : la propriété étant initialisée en 2 et étant héréditaire est donc vraie pour tout $p \geq 2$.

3. Soient $E = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 = \{(\overline{0};\overline{0});(\overline{0};\overline{1});(\overline{1};\overline{0});(\overline{1};\overline{1})\}$
$E_1 = (\overline{0};\overline{0});(\overline{1};\overline{0}); E_2 = (\overline{0};\overline{0});(\overline{1};\overline{1}); E_3 = (\overline{0};\overline{0});(\overline{0};\overline{1})$
alors $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$