

Marches aléatoires

Christian CYRILLE

12 mai 2017

"Il ne s'agit ni de rire, ni de pleurer mais de comprendre"
Spinoza

1 Marche aléatoire sur un axe

1.1 Parcours d'un mobile

p désigne un réel élément de $]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$.

Un mobile se déplace sur un axe d'origine O .

- A chaque instant, il est soit en O , soit en A d'abscisse 1, soit en B d'abscisse -1 .
- Si à un instant donné, il est en O , à l'instant suivant, il sera en A avec la probabilité p ou en B avec la probabilité q .
- Si à un instant donné, il est en A ou en B , à l'instant suivant il sera à coup sûr en O .

Pour tout entier naturel n , on appelle X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce mobile à l'instant n .

On suppose que le "voyage" du mobile commence en O donc que $X_0 = 0$.

1. Donner les lois de X_1 et de X_2 .
2. Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{-1; 0; 1\}$ calculer $P(X_{n+1} = i / X_n = j)$
3. En déduire que

$$\begin{cases} P(X_{n+1} = -1) = qP(X_n = 0) \\ P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = -1) + P(X_n = 1) \\ P(X_{n+1} = 1) = pP(X_n = 0) \end{cases}$$

On pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = -1) \\ P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix}$

1. Justifier que $U_{n+1} = MU_n$ où m est une matrice carrée réelle d'ordre 3 que l'on précisera.
2. Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de M avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$
3. Pour tout $k \in \{1; 2; 3\}$ trouver un vecteur colonne propre de M associé à la valeur propre λ_k dont la première composante soit positive et la deuxième égale à λ_k

On considère la matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

1. Montrer qu'il existe une matrice Q inversible telle que $D = Q^{-1}MQ$
2. En déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ l'on a : $M^n = QD^nQ^{-1}$

3. Montrer que pour tout entier naturel n l'on a :

$$\begin{cases} P(X_n = -1) = q \frac{1 - (-1)^n}{2} \\ P(X_n = 0) = \frac{1 + (-1)^n}{2} \\ P(X_n = 1) = p \frac{1 - (-1)^n}{2} \end{cases}$$

4. Calculer $P(X_n = 0)$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?
5. Calculer les espérances des variables X_{2n} et X_{2n+1}
6. Calculer leurs variances $V(X_{2n})$ et $V(X_{2n+1})$ puis déterminer la valeur de p pour laquelle $V(X_{2n+1})$ est maximale.

1.2 Algorithme

	A	B	C	D	F	G	H
1	p = 0,2		Numéro épreuve	Position M	Valeurs	Effectifs	Fréquences
2	q = 0,8		0	0	-1	408	0,40759241
3			1	-1	0	500	0,4995005
4			2	0	1	92	0,09190809
5			3	-1	Total	1000	0,999001
6			4	0			
7			5	1			
8			6	0			
9			7	1			
10			8	0			
11			9	1			
12			10	0			
13			11	-1			
14			12	0			
15			13	-1			
16			14	0			
17			15	-1			
18			16	0			
19			17	-1			
20			18	0			
21			19	1			
22			20	0			

	A	B	C	D	F	G	H
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							

	A	B	C	D
	p = 0,2	Numéro épreuve	Position M	
	q = =1-B1	0	0	
		1	=SI(D2=0;SI(ALEA()<=\$B\$1;1;-1);0)	
		2	=SI(D3=0;SI(ALEA()<=\$B\$1;1;-1);0)	
		3	=SI(D4=0;SI(ALEA()<=\$B\$1;1;-1);0)	
		4	=SI(D5=0;SI(ALEA()<=\$B\$1;1;-1);0)	
		5	=SI(D6=0;SI(ALEA()<=\$B\$1;1;-1);0)	
		6	=SI(D7=0;SI(ALEA()<=\$B\$1;1;-1);0)	
		7	=SI(D8=0;SI(ALEA()<=\$B\$1;1;-1);0)	
		8	=SI(D9=0;SI(ALEA()<=\$B\$1;1;-1);0)	
		9	=SI(D10=0;SI(ALEA()<=\$B\$1;1;-1);0)	
		10	=SI(D11=0;SI(ALEA()<=\$B\$1;1;-1);0)	
		11	=SI(D12=0;SI(ALEA()<=\$B\$1;1;-1);0)	
		12	=SI(D13=0;SI(ALEA()<=\$B\$1;1;-1);0)	
		13	=SI(D14=0;SI(ALEA()<=\$B\$1;1;-1);0)	
		14	=SI(D15=0;SI(ALEA()<=\$B\$1;1;-1);0)	
		15	=SI(D16=0;SI(ALEA()<=\$B\$1;1;-1);0)	
		16	=SI(D17=0;SI(ALEA()<=\$B\$1;1;-1);0)	
		17	=SI(D18=0;SI(ALEA()<=\$B\$1;1;-1);0)	
		18	=SI(D19=0;SI(ALEA()<=\$B\$1;1;-1);0)	

Valeurs	Effectifs	Fréquences
-1	=NB.SI(D;-1)	=NB.SI(D;-1)/NBVAL(D:D)
0	=NB.SI(D;0)	=NB.SI(D;0)/NBVAL(D:D)
1	=NB.SI(D;1)	=NB.SI(D;1)/NBVAL(D:D)
Total	=SOMME(G2:G4)	=SOMME(H2:H4)

2 Marche aléatoire sur un triangle

2.1 Un peu de probabilités

Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle propre ABC de la façon suivante :

si à l'instant n il est sur l'un des 3 sommets alors à l'instant $n + 1$

- soit il y reste avec la probabilité $\frac{2}{3}$
- soit il se place sur l'un des deux autres sommets et ceci avec la même probabilité.

On note

1. A_n l'événement : "Le mobile se trouve en A à l'instant n " et $a_n = P(A_n)$
2. B_n l'événement : "Le mobile se trouve en B à l'instant n " et $b_n = P(B_n)$
3. C_n l'événement : "Le mobile se trouve en C à l'instant n " et $c_n = P(C_n)$

On suppose que le mobile se trouve en A à l'instant 0.

1. Déterminer $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$. Justifier.
2. Pour tout entier naturel n , déterminer $a_n + b_n + c_n$. Justifier.
3. Pour tout entier naturel n , déterminer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n
4. Dédurre de la question précédente que pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \\ a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n) \end{cases}$$

5. En déduire les valeurs de a_n, b_n et c_n en fonction de n . Déterminer alors les limites de ces trois suites. Interpréter le résultat obtenu.

2.2 Simulation sur tableur

Cette feuille a été réalisée par Joël Elisée qui note 0, 1 et 2 les sommets A, B et C.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3		2/3						
4		5/6						
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								
28								
29								
30								
31								
32								
33								
34								
35								
36								
37								
38								
39								
40								

frontières	n	aléa	position	effectifs	fréquences
	0		0	0	0,296
	1	0,8729114	2	1	0,334
	2	0,3890054	2	2	0,37
	3	0,3069167	2		1
	4	0,7837461	0		
	5	0,3979892	0		
	6	0,7639474	1		
	7	0,4472458	1		
	8	0,0440351	1		
	9	0,5081158	1		
	10	0,0292377	1		
	11	0,9308126	0		
	12	0,868837	2		
	13	0,6350232	2		
	14	0,5178771	2		
	15	0,8812221	1		
	16	0,2723223	1		
	17	0,5479223	1		
	18	0,9736982	0		
	19	0,0797466	0		
	20	0,9672991	2		
	21	0,4242927	2		
	22	0,0267301	2		
	23	0,2464468	2		
	24	0,0364196	2		
	25	0,5452381	2		
	26	0,4420237	2		
	27	0,5171491	2		
	28	0,0647104	2		
	29	0,3729994	2		
	30	0,0474977	2		
	31	0,0392485	2		
	32	0,8320409	0		
	33	0,2353082	0		
	34	0,907463	2		
	35	0,6909337	0		
	36	0,3940838	0		
	37	0,3139262	0		
	38	0,9865615	2		

frontières	n	aléa	position
	0	0	
=2/3	1	=ALEA()	=SI(D3<A\$2;E2;SI(D3<A\$3;MOD(E2+1;3);MOD(E2+2;3)))
=A2+1/6	2	=ALEA()	=SI(D4<A\$2;E3;SI(D4<A\$3;MOD(E3+1;3);MOD(E3+2;3)))
	3	=ALEA()	=SI(D5<A\$2;E4;SI(D5<A\$3;MOD(E4+1;3);MOD(E4+2;3)))
	4	=ALEA()	=SI(D6<A\$2;E5;SI(D6<A\$3;MOD(E5+1;3);MOD(E5+2;3)))
	5	=ALEA()	=SI(D7<A\$2;E6;SI(D7<A\$3;MOD(E6+1;3);MOD(E6+2;3)))
	6	=ALEA()	=SI(D8<A\$2;E7;SI(D8<A\$3;MOD(E7+1;3);MOD(E7+2;3)))
	7	=ALEA()	=SI(D9<A\$2;E8;SI(D9<A\$3;MOD(E8+1;3);MOD(E8+2;3)))
	8	=ALEA()	=SI(D10<A\$2;E9;SI(D10<A\$3;MOD(E9+1;3);MOD(E9+2;3)))
	9	=ALEA()	=SI(D11<A\$2;E10;SI(D11<A\$3;MOD(E10+1;3);MOD(E10+2;3)))
	10	=ALEA()	=SI(D12<A\$2;E11;SI(D12<A\$3;MOD(E11+1;3);MOD(E11+2;3)))
	11	=ALEA()	=SI(D13<A\$2;E12;SI(D13<A\$3;MOD(E12+1;3);MOD(E12+2;3)))
	12	=ALEA()	=SI(D14<A\$2;E13;SI(D14<A\$3;MOD(E13+1;3);MOD(E13+2;3)))
	13	=ALEA()	=SI(D15<A\$2;E14;SI(D15<A\$3;MOD(E14+1;3);MOD(E14+2;3)))
	14	=ALEA()	=SI(D16<A\$2;E15;SI(D16<A\$3;MOD(E15+1;3);MOD(E15+2;3)))
	15	=ALEA()	=SI(D17<A\$2;E16;SI(D17<A\$3;MOD(E16+1;3);MOD(E16+2;3)))
	16	=ALEA()	=SI(D18<A\$2;E17;SI(D18<A\$3;MOD(E17+1;3);MOD(E17+2;3)))
	17	=ALEA()	=SI(D19<A\$2;E18;SI(D19<A\$3;MOD(E18+1;3);MOD(E18+2;3)))
	18	=ALEA()	=SI(D20<A\$2;E19;SI(D20<A\$3;MOD(E19+1;3);MOD(E19+2;3)))
	19	=ALEA()	=SI(D21<A\$2;E20;SI(D21<A\$3;MOD(E20+1;3);MOD(E20+2;3)))
	20	=ALEA()	=SI(D22<A\$2;E21;SI(D22<A\$3;MOD(E21+1;3);MOD(E21+2;3)))
	21	=ALEA()	=SI(D23<A\$2;E22;SI(D23<A\$3;MOD(E22+1;3);MOD(E22+2;3)))
	22	=ALEA()	=SI(D24<A\$2;E23;SI(D24<A\$3;MOD(E23+1;3);MOD(E23+2;3)))
	23	=ALEA()	=SI(D25<A\$2;E24;SI(D25<A\$3;MOD(E24+1;3);MOD(E24+2;3)))
	24	=ALEA()	=SI(D26<A\$2;E25;SI(D26<A\$3;MOD(E25+1;3);MOD(E25+2;3)))
	25	=ALEA()	=SI(D27<A\$2;E26;SI(D27<A\$3;MOD(E26+1;3);MOD(E26+2;3)))
	26	=ALEA()	=SI(D28<A\$2;E27;SI(D28<A\$3;MOD(E27+1;3);MOD(E27+2;3)))
	27	=ALEA()	=SI(D29<A\$2;E28;SI(D29<A\$3;MOD(E28+1;3);MOD(E28+2;3)))
	28	=ALEA()	=SI(D30<A\$2;E29;SI(D30<A\$3;MOD(E29+1;3);MOD(E29+2;3)))
	29	=ALEA()	=SI(D31<A\$2;E30;SI(D31<A\$3;MOD(E30+1;3);MOD(E30+2;3)))
	30	=ALEA()	=SI(D32<A\$2;E31;SI(D32<A\$3;MOD(E31+1;3);MOD(E31+2;3)))
	31	=ALEA()	=SI(D33<A\$2;E32;SI(D33<A\$3;MOD(E32+1;3);MOD(E32+2;3)))
	32	=ALEA()	=SI(D34<A\$2;E33;SI(D34<A\$3;MOD(E33+1;3);MOD(E33+2;3)))
	33	=ALEA()	=SI(D35<A\$2;E34;SI(D35<A\$3;MOD(E34+1;3);MOD(E34+2;3)))
	34	=ALEA()	=SI(D36<A\$2;E35;SI(D36<A\$3;MOD(E35+1;3);MOD(E35+2;3)))
	35	=ALEA()	=SI(D37<A\$2;E36;SI(D37<A\$3;MOD(E36+1;3);MOD(E36+2;3)))
	36	=ALEA()	=SI(D38<A\$2;E37;SI(D38<A\$3;MOD(E37+1;3);MOD(E37+2;3)))
	37	=ALEA()	=SI(D39<A\$2;E38;SI(D39<A\$3;MOD(E38+1;3);MOD(E38+2;3)))
	38	=ALEA()	=SI(D40<A\$2;E39;SI(D40<A\$3;MOD(E39+1;3);MOD(E39+2;3)))

effectifs	fréquences	
0	=NB.SI(E\$2:E\$501;F2)	=G2/G\$5
1	=NB.SI(E\$2:E\$501;F3)	=G3/G\$5
2	=NB.SI(E\$2:E\$501;F4)	=G4/G\$5
	=SOMME(G2:G4)	=SOMME(H2:H4)

2.3 Algorithme en Algobox

```

1  VARIABLES
2  N EST_DU_TYPE NOMBRE
3  I EST_DU_TYPE NOMBRE
4  A EST_DU_TYPE LISTE
5  B EST_DU_TYPE LISTE
6  C EST_DU_TYPE LISTE
7  X EST_DU_TYPE NOMBRE
8  NBA EST_DU_TYPE NOMBRE
9  NBB EST_DU_TYPE NOMBRE
10 NBC EST_DU_TYPE NOMBRE
11 FRA EST_DU_TYPE NOMBRE
12 FRB EST_DU_TYPE NOMBRE
13 FRC EST_DU_TYPE NOMBRE
14 DEBUT_ALGORITHME
15   LIRE N
16   A[0] PREND_LA_VALEUR 1
17   NBA PREND_LA_VALEUR 1
18   B[0] PREND_LA_VALEUR 0
19   NBB PREND_LA_VALEUR 0
20   C[0] PREND_LA_VALEUR 0
21   NBC PREND_LA_VALEUR 0
22   AFFICHER A[0]
23   AFFICHER B[0]
24   AFFICHER C[0]
25   POUR I ALLANT_DE 1 A N
26     DEBUT_POUR

```

```

27 X PREND_LA_VALEUR 1 + floor(6*random())
28 AFFICHER "La valeur de X est "
29 AFFICHER X
30 SI (X == 1) ALORS
31     DEBUT_SI
32     SI (A[I-1] == 1) ALORS
33         DEBUT_SI
34         A[I] PREND_LA_VALEUR 0
35         B[I] PREND_LA_VALEUR 1
36         NBB PREND_LA_VALEUR NBB+1
37         C[I] PREND_LA_VALEUR 0
38     FIN_SI
39     SINON
40         DEBUT_SINON
41         SI (B[I-1]==1) ALORS
42             DEBUT_SI
43             A[I] PREND_LA_VALEUR 0
44             B[I] PREND_LA_VALEUR 0
45             C[I] PREND_LA_VALEUR 1
46             NBC PREND_LA_VALEUR NBC+1
47         FIN_SI
48         SINON
49             DEBUT_SINON
50             A[I] PREND_LA_VALEUR 1
51             NBA PREND_LA_VALEUR NBA+1
52             B[I] PREND_LA_VALEUR 0
53             C[I] PREND_LA_VALEUR 0
54         FIN_SINON
55     FIN_SINON
56 FIN_SI
57 SINON
58     DEBUT_SINON
59     SI (X == 2) ALORS
60         DEBUT_SI
61         SI (A[I-1] == 1) ALORS
62             DEBUT_SI
63             A[I] PREND_LA_VALEUR 0
64             B[I] PREND_LA_VALEUR 0
65             C[I] PREND_LA_VALEUR 1
66             NBC PREND_LA_VALEUR NBC+1
67         FIN_SI
68         SINON
69             DEBUT_SINON
70             SI (B[I-1]==1) ALORS
71                 DEBUT_SI
72                 A[I] PREND_LA_VALEUR 1
73                 NBA PREND_LA_VALEUR NBA+1
74                 B[I] PREND_LA_VALEUR 0
75                 C[I] PREND_LA_VALEUR 0
76             FIN_SI
77             SINON
78                 DEBUT_SINON
79                 A[I] PREND_LA_VALEUR 0

```

```

80         B[I] PREND_LA_VALEUR 1
81         NBB PREND_LA_VALEUR NBB + 1
82         C[I] PREND_LA_VALEUR 0
83         FIN_SINON
84     FIN_SINON
85     FIN_SI
86     SINON
87         DEBUT_SINON
88         SI (A[I-1] == 1) ALORS
89             DEBUT_SI
90             A[I] PREND_LA_VALEUR 1
91             NBA PREND_LA_VALEUR NBA + 1
92             B[I] PREND_LA_VALEUR 0
93             C[I] PREND_LA_VALEUR 0
94             FIN_SI
95             SINON
96                 DEBUT_SINON
97                 SI (B[I-1]==1) ALORS
98                     DEBUT_SI
99                     A[I] PREND_LA_VALEUR 0
100                    B[I] PREND_LA_VALEUR 1
101                    NBB PREND_LA_VALEUR NBB + 1
102                    C[I] PREND_LA_VALEUR 0
103                    FIN_SI
104                    SINON
105                        DEBUT_SINON
106                        A[I] PREND_LA_VALEUR 0
107                        B[I] PREND_LA_VALEUR 0
108                        C[I] PREND_LA_VALEUR 1
109                        NBC PREND_LA_VALEUR NBC + 1
110                        FIN_SINON
111                    FIN_SINON
112                FIN_SINON
113            FIN_SINON
114        AFFICHER A[I]
115        AFFICHER B[I]
116        AFFICHER C[I]
117        FIN_POUR
118    AFFICHER "Le nombre de A est "
119    AFFICHER NBA
120    FRA PREND_LA_VALEUR NBA/N
121    AFFICHER "La fréquence de A est "
122    AFFICHER FRA
123    AFFICHER "Le nombre de B est "
124    AFFICHER NBB
125    FRB PREND_LA_VALEUR NBB/N
126    AFFICHER "La fréquence de B est "
127    AFFICHER FRB
128    AFFICHER "Le nombre de C est "
129    AFFICHER NBC
130    FRC PREND_LA_VALEUR NBC/N
131    AFFICHER "La fréquence de C est "
132    AFFICHER FRC

```

```
La valeur de X est 2
100
La valeur de X est 1
010
La valeur de X est 5
010
La valeur de X est 2
100
La valeur de X est 5
100
La valeur de X est 3
100
La valeur de X est 2
001
La valeur de X est 3
001
La valeur de X est 1
100
La valeur de X est 4
100
La valeur de X est 1
010
La valeur de X est 3
010
La valeur de X est 6
010
La valeur de X est 5
010
La valeur de X est 2
100
La valeur de X est 5
100
Le nombre de A est 67
La fréquence de A est 0.335
Le nombre de B est 69
La fréquence de B est 0.345
Le nombre de C est 65
La fréquence de C est 0.325
***Algorithme terminé***
```

3 Marche aléatoire sur un cube