Le jeu du Sèbi ou Craps

Professeur : Christian CYRILLE

17 mars 2014

1 Le jeu du craps

"Dieu ne joue pas aux dés ! "
(Lettre d'Albert Einstein à Max Born à propos de la mécanique quantique)

1.1 Etude du jet simultané de deux dés non pipés

On lance simultanément 2 dés non truqués numérotés de 1 à 6.

1. Définir l'univers Ω correspondant au lancer des 2 dés.
2. On s'intéresse à la variable aléatoire réelle S = la somme des numéros apparaissant sur les faces de dessus. Déterminer :
   - l'univers-image $S < \Omega >$
   - la loi de probabilité de S
   - l'espérance mathématique de S
   - l'événement élémentaire de $S < \Omega >$ qui a la probabilité la plus forte.
   - Vérifier que pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq 7$,
     $P([S = 14 - k]) = P([S = k]) = \dfrac{k-1}{36}$
   - Vérifier que pour tout entier k vérifiant $7 \leq k \leq 12$,
     $P([S = 14 - k]) = P([S = k]) = \dfrac{13-k}{36}$
   - Calculer la probabilité $P([S \notin \{k; 7\}])$ pour chaque $k \in \{4; 5; 6\}$.
     En déduire une formule générale pour $k \in \{4; 5; 6\}$
   - Calculer la probabilité $P([S \notin \{k; 7\}])$ pour chaque $k \in \{8; 9; 10\}$.
     En déduire une formule générale pour $k \in \{8; 9; 10\}$.

1.2 Le craps

Le jeu du craps , jeu à 1 joueur très populaire aux Etats-Unis, est une succession de jets simultanés de 2 dés discernables, par exemple de couleurs différentes, non pipés. Il ressemble au jeu du sèbi , lui aussi très populaire en Martinique. il n'en diffère que sur un seul point comme on le verra plus bas.
On considère les jets comme des épreuves indépendantes. A chaque jet on s'intéresse à S la somme des numéros portés sur les faces du dessus.
La règle du jeu est la suivante :

- le premier jet est particulier :
  - si $S = 7$ ou 11 le joueur gagne et la partie est terminée.(Dans le sèbi martiniquais, on peut aussi gagner avec 10 obtenu par $(5, 5)$)
  - Si $S = 2, 3$ ou 12 le joueur perd et la partie est terminée..
  - Si $S = 4, 5, 6, 8, 9$ ou 10, la partie n'est pas encore terminée : le joueur reprend les dés et effectue un second jet.
    Dans ce cas, on note $k \in \{4; 5; 6; 8; 9; 10\}$ le résultat du premier jet.
- A partir de là, le joueur relance les dés :
  - Si $S = k$ le joueur gagne et la partie est terminée..

  - Si $S = 7$ le joueur perd et la partie est terminée.
  - Sinon, il reprend les dés et effectue le jet suivant
- L'objectif du joueur est de reproduire la valeur k en essayant d'éviter de réaliser la valeur 7.

1. Soient n un entier naturel non nul et $k \in \{4; 5; 6\}$.
   On suppose que lors du premier jet, le joueur a réalisé l'événement $[S = k]$. Montrer que, pour $n \geq 2$, la probabilité de l'événement "le joueur gagne (c'est-à-dire reproduit $S = k$) au n-ième jet " vaut :
   $\frac{k-1}{36}(\frac{31-k}{36})^{n-2}$
2. En déduire que si le joueur a réalisé $[S = k]$ pour $k \in \{4; 5; 6\}$ lors du premier jet, la probabilité de gagner à partir du second jet vaut :
   $P(D_k) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{k-1}{36}(\frac{31-k}{36})^{n-2} = \frac{k-1}{k+5}$
3. Soient n un entier naturel non nul et $k \in \{8; 9; 10\}$.
   On suppose que lors du premier jet, le joueur a réalisé l'événement $[S = k]$.
   Montrer que, pour $n \geq 2$, la probabilité de l'événement "le joueur gagne (c'est-à-dire reproduit $S = k$) au n-ième jet " vaut :
   $\frac{13-k}{36}(\frac{17+k}{36})^{n-2}$
4. En déduire que si le joueur a réalisé $[S = k]$ pour $k \in \{8; 9; 10\}$ lors du premier jet, la probabilité de gagner à partir du second jet vaut :
   $P(E_k) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{13-k}{36}(\frac{17+k}{36})^{n-2} = \frac{13-k}{19-k}$
5. Soit G' l'événement "le joueur gagne au premier jet". Déterminer la probabilité de G'.
6. Soit $G"$ l'événement "le joueur ne perd ni ne gagne au premier jet mais gagne après le premier jet".
   Montrer que $P(G") = 2\sum_{k=4}^{6} \frac{k-1}{k+5}\frac{k-1}{36}$.
7. Soit G l'événement "le joueur gagne".
   Montrer que $G = G' \bigcup G"$.Calculer $P(G)$ et vérifier que le jeu de craps n'est pas trop "voleur" c'est-à-dire que la probabilité pour le joueur de gagner est très peu inférieure à 0.5.
   On utilisera $\frac{8}{36} \approx 0.222$; $\frac{9}{324} \approx 0.027$; $\frac{16}{360} \approx 0.044$; $\frac{25}{396} \approx 0.063$
8. Ecrire un programme en Turbo-Pascal simulant le jeu du craps (pas celui du sebi). On lance simultanément les 2 dés. Les gains obtenus au jeu du craps sont les suivants :
   - si l'on obtient 7 ou 11 on gagne 15 euros
   - si l'on obtient 2 ou 3 ou 12 on perd 15 euros
   - si l'on obtient autre chose comme somme on rejoue jusqu'à ce que l'on trouve un total valant cette somme(on gagne alors 30 euros) mais si l'on fait 7 comme total l'on perd 30 euros.

   Ce programme utilisera obligatoirement dans le programme principal les instructions :
   - *randomize* pour initialiser le générateur de nombres aléatoires
   - *random*(n) qui ramène un entier entre 0 et $n - 1$

   et fera appel aux procédures suivantes :
   - les procédures avec passage de paramètres par valeur $GAGNE$ et $PERDU$
   - la procédure non récursive $ONREJOUE$.
9. Modifier uniquement la procédure $ONREJOUE$ pour la rendre récursive. On rappelle qu'une procédure est dite récursive lorsque dans le corps de son programme elle fait appel à elle-même.

2 Corrigé

2.1 Résultats préliminaires

Soit q un réel strictement compris entre 0 et 1. Soit N un entier naturel non nul.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} q^k$ est la somme de $(n+1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme q^0 et de raison q donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} q^k = q^0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
2. Comme $0 < q < 1$
   alors $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} q^{n+1} = 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1}{1-q}$

2.2 Etude du jet simultané de deux dés non pipés

On lance simultanément 2 dés non truqués numérotés de 1 à 6.

1. L'univers Ω correspondant au lancer des 2 dés est $\Omega = [|1;6|]^2$
2. On s'intéresse à la variable aléatoire réelle $S =$ la somme des numéros apparaissant sur les faces de dessus. Déterminer :
   - l'univers-image $S < \Omega >= [|2;12|]$
   - la loi de probabilité de S est entièrement déterminée par la connaissance des $p_i = P([S = s_i])$ où les s_i sont les éléments de $[|2;12|]$
     D'après le tableau suivant :

$de2$ / $de1$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

   - on en déduit que l'événement élémentaire de $S < \Omega >$ qui a la probabilité la plus forte est 7 .
     Comme

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	*total*
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$s_i p_i$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{252}{36} = 7$

     alors l'espérance mathématique de S est $E(S) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = 7$.
   - On peut vérifier que pour tout entier k vérifiant $2 \le k \le 7$,
     $P([S = 14 - k]) = P([S = k]) = \dfrac{k-1}{36}$
   - On peut vérifier que pour tout entier k vérifiant $7 \le k \le 12$,
     $P([S = 14 - k]) = P([S = k]) = \dfrac{13-k}{36}$
   - la probabilité $P([S \notin \{4;7\}]) = 1 - \dfrac{9}{36} = \dfrac{27}{36}$
     la probabilité $P([S \notin \{5;7\}]) = 1 - \dfrac{10}{36} = \dfrac{26}{36}$
     la probabilité $P([S \notin \{6;7\}]) = 1 - \dfrac{11}{36} = \dfrac{25}{36}$
     la probabilité $P([S \notin \{k;7\}]) = \dfrac{31-k}{36}$ pour $k \in \{4;5;6\}$

la probabilité $P([S \notin \{8;7\}]) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$
la probabilité $P([S \notin \{9;7\}]) = 1 - \frac{10}{36} = \frac{26}{36}$
la probabilité $P([S \notin \{10;7\}]) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36}$
la probabilité $P([S \notin \{k;7\}]) = \frac{17+k}{36}$ pour $k \in \{8;9;10\}$

2.3 Le craps

Le jeu du craps , jeu à 1 joueur très populaire aux Etats-Unis, est une succession de jets simultanés de 2 dés discernables, par exemple de couleurs différentes, non pipés. Il ressemble au jeu du sèbi , lui aussi très populaire en Martinique. il n'en diffère que sur un seul point comme on le verra plus bas.
On considère les jets comme des épreuves indépendantes. A chaque jet on s'intéresse à S la somme des numéros portés sur les faces du dessus.
La règle du jeu est la suivante :
- le premier jet est particulier :
  - si $S = 7$ ou 11 le joueur gagne et la partie est terminée.(Dans le sèbi martiniquais, on peut aussi gagner avec 10 obtenu par $(5,5)$)
  - Si $S = 2, 3$ ou 12 le joueur perd et la partie est terminée..
  - Si $S = 4, 5, 6, 8, 9$ ou 10, la partie n'est pas encore terminée : le joueur reprend les dés et effectue un second jet.
    Dans ce cas, on note $k \in \{4;5;6;8;9;10\}$ le résultat du premier jet.
- A partir de là, le joueur relance les dés :
  - Si $S = k$ le joueur gagne et la partie est terminée..
  - Si $S = 7$ le joueur perd et la partie est terminée.
  - Sinon, il reprend les dés et effectue le jet suivant
- L'objectif du joueur est de reproduire la valeur k en essayant d'éviter de réaliser la valeur 7.

1. Soient n un entier naturel non nul et $k \in \{4;5;6\}$.
   On suppose que lors du premier jet, le joueur a réalisé l'événement $[S = k]$.
   Pour $n \geq 2$, "le joueur gagne (c'est-à-dire reproduit $S = k$) au n-ième jet lorsque du 2ème jet au $(n-1)$ -ème jet il ne fait ni k , ni 7 puis au $n$ème jet il fait k donc la probabilité de l'événement "le joueur gagne (c'est-à-dire reproduit $S = k$) au n-ième jet " vaut :
   $(\frac{31-k}{36})^{n-2} \frac{k-1}{36}$
2. Si le joueur a réalisé $[S = k]$ pour $k \in \{4;5;6\}$ lors du premier jet, la probabilité de gagner à partir du second jet (donc soit au 2-ème, soit au 3-éme $\cdots$) vaut :
   $$P(D_k) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{k-1}{36}(\frac{31-k}{36})^{n-2} = \frac{k-1}{36}\sum_{n=2}^{+\infty}(\frac{31-k}{36})^{n-2} = \frac{k-1}{36}\frac{1}{1-\frac{31-k}{36}} = \frac{k-1}{36}\frac{36}{5+k} = \frac{k-1}{k+5}$$
3. Soient n un entier naturel non nul et $k \in \{8;9;10\}$.
   On suppose que lors du premier jet, le joueur a réalisé l'événement $[S = k]$.
   Pour $n \geq 2$, "le joueur gagne (c'est-à-dire reproduit $S = k$) au n-ième jet lorsque du 2ème jet au $(n-1)$ -ème jet il ne fait ni k , ni 7 puis au $n$ème jet il fait k la probabilité de l'événement "le joueur gagne (c'est-à-dire reproduit $S = k$) au n-ième jet " vaut :
   $(\frac{17+k}{36})^{n-2} \frac{13-k}{36}$
4. Si le joueur a réalisé $[S = k]$ pour $k \in \{8;9;10\}$ lors du premier jet, la probabilité de gagner à partir du second jet (donc soit au 2-ème, soit au 3-éme $\cdots$) vaut :
   $$P(E_k) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{13-k}{36}(\frac{17+k}{36})^{n-2} = \frac{13-k}{36}\sum_{n=2}^{+\infty}(\frac{17+k}{36})^{n-2} = \frac{13-k}{36}\frac{1}{1-\frac{17+k}{36}} = \frac{13-k}{36}\frac{36}{19-k} = \frac{13-k}{19-k}$$
5. Soit G' l'événement "le joueur gagne au premier jet" c'est-à-dire "le joueur fait 7 ou 11" . comme ces 2 événements sont disjoints alors la probabilité de G' est $\frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36}$.
6. Soit G" l'événement "le joueur ne perd ni ne gagne au premier jet mais gagne après le premier jet". Donc "le joueur fait soit 4 ou 5 ou 6 puis D_k soit 8 ou 9 ou 10 suivi de E_k" , ces 2 événements sont disjoints .

Donc $P(G") = \sum_{k=4}^{6} \frac{k-1}{k+5}\frac{k-1}{36} + \sum_{k=8}^{10} \frac{13-k}{19-k}\frac{13-k}{36} = 2\sum_{k=4}^{6} \frac{k-1}{k+5}\frac{k-1}{36}$ en posant $13-k = h-1$ dans la deuxième sommation. .

7. Soit G l'événement "le joueur gagne".
   Alors de deux choses l'une, ou bien "le joueur a gagné au premier jet" ou bien "le joueur ne perd ni ne gagne au premier jet mais gagne après le premier jet" donc comme ces deux événements sont disjoints alors $G = G' \bigcup G"$.
   $P(G) = P(G') + P(G") = \frac{8}{36} + 2\sum_{k=4}^{6} \frac{k-1}{k+5}\frac{k-1}{36}$
   $= \frac{8}{36} + 2(\frac{9}{324} + \frac{16}{360} + \frac{25}{396}) \approx 0.222 + 2(0.027 + 0.044 + 0.063) \approx 0.49$ donc le jeu de craps n'est pas trop "voleur" car la probabilité pour le joueur de gagner est très peu inférieure à 0.5.

8. voici un programme en Turbo-Pascal simulant le jeu du craps.

```
program CRAPS;
uses WinCrt;
type
de : 1..6;
sigma : 2..12;
var
DE1,DE2 : de;
SOMME : Sigma;

procedure GAGNE(x : word);
begin
writeln('Vous avez gagné ', x, 'euros');
end;

procedure PERDU(y : word);
begin
writeln('Vous avez gagné ', y, 'euros');
end;

procedure ONREJOUE;
var DE3, DE4 : de; TOTAL : sigma; FINI : boolean;
begin
repeat
randomize;
DE3 := random(6) + 1; writeln('le premier dé marque ', DE3);
DE4 := random(6) + 1; writeln('le premier dé marque ', DE4);
TOTAL := DE3 + DE4;
FINI := (TOTAL = SOMME) or (TOTAL = 7);
until FINI;
if TOTAL = 7 then PERDU(30) else GAGNE (30);
end;

begin(* du programme principal *)
randomize;
DE1 := random(6) + 1;
writeln('le premier dé marque ', DE1);
DE2 := random(6) + 1;
writeln('le premier dé marque ', DE2);
SOMME := DE3 + DE4;
writeln('la somme des deux dés est ', SOMME);
if ((SOMME = 7) or (SOMME = 11)
then GAGNE(15)
else if (((SOMME = 2) or (SOMME = 3)) or (SOMME = 12))
```

then PERDU(15)
else ONREJOUE ;
end.

9. On peut aussi utiliser une procédure ONREJOUE récursive.
procedure ONREJOUE ;
var DE3, DE4 : de ; TOTAL : sigma ;
begin
randomize ;
DE3 := random(6) + 1 ;
writeln('le premier dé marque ', DE3) ;
DE4 := random(6) + 1 ;
writeln('le premier dé marque ', DE4) ;
TOTAL := DE3 + DE4 ;
writeln('la somme des deux dés est ', TOTAL) ;
if TOTAL = 7 then PERDU(30)
else if TOTAL = SOMME
then GAGNE (30)
else ON REJOUE ;
end ;

10. Le même programme en scilab.

```
function gagne=gagne()
    disp("La partie est terminée : On a gagné! ")
endfunction
function perdu=perdu()
    disp("La partie est terminée : on a perdu !")
endfunction
function onrejoue=onrejoue()
    disp("On continue à jouer !")
    de=tirage_entier(2,1,6)
    disp("le premier dé marque " + string(de(1)))
    disp("le deuxième dé marque " + string(de(2)))
    total =de(1)+de(2)
    disp("le nouveau total est " + string(total))
    if total==somme then
        gagne()
    elseif total==7 then
        perdu()
    else
        onrejoue()
    end
endfunction
    de=tirage_entier(2,1,6)
    disp("le premier dé marque " + string(de(1)))
    disp("le deuxième dé marque " + string(de(2)))
    somme=de(1)+de(2)
   disp("la somme des deux dés est " + string(somme))
    if (somme==12)|(somme == 7) |((de(1)==5)& (de(2)==5)) then
        gagne()
    elseif ((somme==2) |(somme==3)) |(somme==12) then
        perdu()
    else
        onrejoue()
    end
```