I25H

e3a concours

CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve d'Informatique MP

durée 3 heures

L'usage de la calculatrice est interdit

Indiquez en tête de copie ou de chaque exercice le langage utilisé.

1. Calendrier

Écrire la fonction

```
dateValide          données j, m, a : entiers
                    résultat : booléen
```

qui retourne `Vrai` si la date représentée par le triplet *j*, *m*, *a* (jour, mois, année) est une date valide, et `Faux` sinon

Règles de validité d'une date :

- janvier, mars, mai, juillet, août, octobre, décembre ont 31 jours ;
- avril, juin, septembre, novembre ont 30 jours ;
- février a 29 jours si l'année est bissextile, 28 sinon ;
- une année est bissextile si :
  - pour les années séculaires (1900,2000, etc.), elle est divisible par 400,
  - pour les autres années, si elle est divisible par 4 ;
- on se limitera aux dates postérieures au 15 octobre 1582, date de mise en application en France de ces règles (calendrier Grégorien).

Tournez la page S.V.P.

2. *Résistance équivalente*

Écrire la fonction

```
resistanceEquivalente      données r : liste de réels
                           résultat : réel
```

qui retourne la valeur de la résistance équivalente aux résistances en parallèle dont les valeurs sont contenues dans la liste `r`. On utilisera si besoin une fonction donnant le nombre d'éléments d'une liste.

3. *Sous-suite de trois nombres de somme maximale.*

Écrire la fonction

```
indiceTripletMaximal      données lst : liste d'entiers
                          résultat : entier
```

qui retourne l'indice du premier élément du triplet de somme maximale dans la liste de nombres `lst`, supposée de cardinal au moins égal à 3.

Par exemple, pour la liste suivante

liste	**1**	**5**	**7**	**8**	**6**	**2**	**7**	**9**	**4**
indice	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*

la fonction retournerait 3, indice du premier élément du triplet (7,8,6) de somme 21.

4. *Suite ordonnée des multiples de 2,3 et 5.*

Le but de ce problème est de construire la suite ordonnée des entiers de la forme $2^p3^q5^r$, où p, q et r sont des entiers naturels.

Cette suite commence par

liste	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**16**				
indice	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*
				↑ i_5		↑ i_3		↑ i_2								

Principe :

La liste étant en cours de construction, l'élément suivant de la liste sera à choisir parmi les nombres suivants : $2*l[i_2]$, $3*l[i_3]$, $5*l[i_5]$ où i_2 (respectivement i_3, i_5) est l'indice du plus petit élément de la liste n'ayant pas son double (respectivement triple, quintuple) présent dans la liste.

Dans l'exemple, i_2=8, i_3=6 et i_5=4, et l'élément suivant est donc à choisir parmi 2*9=18, 3*6=18 et 5*4=20.

Le plus petit étant 18, c'est l'élément à ajouter à la liste. Les indices concernés par le choix (ici i_2 et i_3) sont à augmenter de 1, ce qui donne le tableau suivant :

liste	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**16**	**18**			
indice	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*
				↑ i_5			↑ i_3		↑ i_2							

Écrire, selon ce principe, le programme qui construit la liste triée des n premiers nombres de la forme $2^p3^q5^r$.

5. *Suites de Fibonacci*

Une suite de Fibonacci généralisée est définie par

$u_0=a$
$u_1=b$
$u_n=u_{n-2}+u_{n-1}$

Plusieurs méthodes peuvent être envisagées pour calculer le $n^{\text{ème}}$ élément de la suite de Fibonacci initialisée par a et b.

1. Méthode récursive simple

On n'utilise pas de variable locale, on se contente de réécrire dans le langage utilisé la définition mathématique.

Écrire la fonction :

```
fibo1      données n, a, b : entiers
           résultat f : entier
```

qui retourne le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite de Fibonacci initialisée par a et b en utilisant la méthode récursive.

2. Méthode itérative

On utilise une boucle avec trois variables locales :

- une variable contient l'avant dernier élément de la suite;
- une variable contient le dernier élément;
- une variable `contient` le nouvel élément.

Écrire la fonction :

```
fibo2      données n, a, b : entiers
           résultat f : entier
```

qui retourne le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite de Fibonacci initialisée par a et b en utilisant la méthode itérative.

3. La méthode la plus efficace : récursive par matrices

1. Montrer (mathématiquement) que $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

2. Écrire une fonction de multiplication de deux matrices carrées 2×2.

3. Écrire une fonction d'élévation à la puissance n d'une matrice carrée de 2×2 en utilisant le principe d'exponentiation rapide :

$\mathrm{A}^0=Id$
$\mathrm{A}^{2n}=\mathrm{A}^n.\mathrm{A}^n$
$\mathrm{A}^{2n+1}=\mathrm{A}^{2n}.\mathrm{A}$

4. Écrire la fonction :

```
fibo3      données n, a, b : entiers
           résultat f : entier
```

qui retourne le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite de Fibonacci initialisée par a et b en utilisant la formule

$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

5. On estime que si une addition prend une unité de temps, une multiplication en coûte 4 et une division 7. Au niveau du coût arithmétique, comparer les méthodes `fibo2` et `fibo3` pour calculer u_{2003} .

Tournez la page S.V.P.

Exercices de recherche

Pour ces deux problèmes, vous n'êtes pas guidés. Essayez de proposer un algorithme permettant de répondre aux questions posées.

6. *Suites oscillantes*

Soit f une fonction entière à valeur entière définie de [0;10 000] dans [0;10 000] et u la suite définie par :

$u_0=a$ (avec $0 \leq a \leq 10\,000$)
$u_{n+1}=f(u_n)$

1. Montrer (mathématiquement) que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang
2. Écrire la fonction

```
periode    données f : fonction; a : entier
           résultat p : entier; e : entier
```

qui étant donné une fonction `f` et un entier `a` retourne `p` (valeur de la période de la suite u définie par $u_0=a$ et $u_{n+1}=f(u_n)$) et `e` un élément de cette période.

7. *Plateau maximal*

Écrire la fonction

```
indicePlateauMaximal      données lst : liste d'entiers
                          résultat : entier
```

qui retourne l'indice du premier élément de la plus grande sous-liste constante de `lst`, liste croissante au sens large de nombres entiers.

Dans l'exemple suivant,

liste	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**	**4**	**4**	**4**	**5**	**5**	**6**	**6**	**7**
indice	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*

la fonction retournerait 8 (indice de début de la plus longue sous-liste constante)