Variations sur la Série harmonique

Professeur : Christian CYRILLE

31 mai 2017

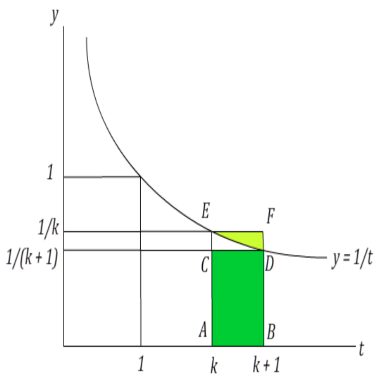
1 La série harmonique diverge

La série harmonique $\sum \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ diverge

1.1 Méthode 1

1. En utilisant la courbe représentative de la fonction inverse sur l'intervalle $[k; k+1]$ où k est un entier naturel non nul,
   démontrer que $\frac{1}{k} \geq ln(k+1) - ln(k)$
2. En déduire que la série harmonique : $\sum \frac{1}{n}$ est divergente

1.1.1 Corrigé



l'aire de la courbe de la fonction inverse $t \mapsto \frac{1}{t}$ entre $k$et $k+1$ est encadrée par les aires des rectangles $ABDC$ et $ABFE$ de hauteurs respectives $\frac{1}{k+1}$ et $\frac{1}{k}$ et de largeur $(k+1) - k = 1$ donc $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$ d'où $\forall k \in \mathbb{N}^*$ on a : $\boxed{\frac{1}{k+1} \leq ln(k+1) - ln(k) \leq \frac{1}{k}}$

En donnant successivement à k les valeurs $1, 2, \cdots$, , on obtient donc

$$\begin{cases} ln(2) - ln(1) \leq \frac{1}{1} \\ ln(3) - ln(2) \leq \frac{1}{2} \\ ln(4) - ln(3) \leq \frac{1}{3} \\ \cdots \\ ln(n+1) - ln(n) \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Donc $ln(n+1) \leq S_n$. Or $\lim\limits_{n \mapsto =\infty} ln(n+1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \mapsto =\infty} S_n = +\infty$
Par conséquent **la série harmonique diverge**.

Léonard EULER a démontré que $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = ln(n) + \gamma + \varepsilon_n}$ où la constante d'Euler $\gamma \approx 0,566$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \varepsilon_n = 0$

1.2 Méthode 2

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\forall t \in [k; k+1] \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$
2. En déduire que $\forall t \in [k; k+1] \quad \frac{1}{k+1} \leq ln(k+1) - ln(k) \leq \frac{1}{k}$
3. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Démontrer que $S_n - 1 \leq ln(n) \leq S_n - \frac{1}{n}$.
4. En déduire que $ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq ln(n) + 1$ puis que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{S_n}{ln(n)} = 1$.
5. En déduire que $S_n \sim ln(n)$ et que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_n = +\infty$

1.3 Méthode 3

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n \leq ln(n) + 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ln(n+1) \leq S_n$
3. Démontrer que $ln(n+1) \sim ln(n)$ puis que $S_n \sim ln(n)$ et que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_n = +\infty$

2 Exercices

2.1 Oral ESCP 11

Soit un entier $n \geq 1$. Une urne contient n boules blanches et une seule boule rose. On effectue une succession de tirages d'une boule à chaque fois. Si l'on tire la boule rose, on la remet dans l'urne avant la tirage suivant ; si l'on tire une boule blanche , on ne la relet pas dans l'urne. Soit X le nombre de tirages juste nécessaires pour qu'il n'y ait plus aucune boule blanche dans l'urne. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

1. Calculer $P([X = n])$
   (a) Démontrer que $\forall n$ entier $\geq 2 \qquad ln(n+1) - ln(2) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq ln(n)$
   (b) En déduire un équivalent simple de $\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \leq ln(n)$
   (c) Trouver de même un équivalent simple de $\sum_{j=2}^{n} \frac{ln(j)}{j}$
   (d) En déduire un équivalent simple de $\sum_{j=2}^{n} [\sum_{i=2}^{j-1} \frac{ln(1)}{i}$
2. Calculer $P([X = n+1])$ puis en donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini.
3. Calculer $P([X = n+2])$ puis en donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini.

2.1.1 Corrigé

1. $P([X=n]) = P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(B_3)\cdots$
   donc $P([X=n]) = \dfrac{n}{n+1} \times \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{n-2}{n-1} \times \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2}$
   On a donc $\boxed{P([X=n]) = \dfrac{1}{n+1}}$
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, soit $k \leq t \leq k+1$
   alors $\dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k}$ car la fonction inverse est décroissante sur $[k; k+1]$
   Les bornes k et $k+1$ étant dans l'ordre croissant on a donc :
   $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dt$
   d'où $\dfrac{1}{k+1} \leq [ln(t)]_k^{k+1} \leq \dfrac{1}{k}$

   i. Comme $\dfrac{1}{k+1} \leq ln(k+1) - ln(k)$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} ln(k+1) - ln(k)$
   d'où $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \leq ln(n)$

   ii. Comme $ln(k+1) - ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$ alors $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} ln(k+1) - ln(k) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$
   d'où $\displaystyle ln(n+1) - ln(2) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$

   iii. Par conséquent, $\boxed{\forall n \text{ entier } \geq 2 \qquad ln(n+1) - ln(2) \leq \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq ln(n)}$

   (b) i. $\dfrac{ln(n+1) - ln(2)}{ln(n)} = \dfrac{ln(\frac{n+1}{2})}{ln(n)} = \dfrac{ln(n(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}))}{ln(n)} = \dfrac{ln(n) + ln(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n})}{ln(n)}$
   $= 1 + \dfrac{ln(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n})}{ln(n)}$
   ii. Donc $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{ln(n+1) - ln(2)}{ln(n)} = 1$
   iii. Par conséquent $ln(n+1) - ln(2) \sim ln(n)$
   Donc $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \sim ln(n)$

   (c) Trouver de même un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} \frac{ln(j)}{j}$

   (d) En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} [\sum_{i=2}^{j-1} \frac{ln(1)}{i} \leq ln(n)$
2. Calculer $P([X = n+1])$ puis en donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini.
3. Calculer $P([X = n+2])$ puis en donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini.

2.2 Exercice

Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par les relations suivantes :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - ln(n)$$

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - ln(n+1)$$

1. Etudier le signe des fonctions ϕ et ψ définies par les relations :

   $$\phi(x) = ln(1+x) - x$$

   et

   $$\psi(x) = ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

2. Montrer que la suite u est décroissante et que la suite v est croissante.
3. Montrer que les suites u et v convergent vers une limite a que l'on ne demande pas de calculer.
4. Déterminer un nombre entier n_0 tel que la relation $n \geq n_0$ implique

   $$\mid a - v_{n-1} \mid \leq 10^{-2}$$

5. Déterminer une valeur approchée de a à la précision 10^{-1}