Séries de Joseph FOURIER (1768-1837)

Christian CYRILLE

15 mai 2017

"L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques."
Joseph Fourier

1 Série de Fourier d'une fonction 2π-périodique et continue

1.1 Série trigonométrique

On appelle série trigonométrique toute série de la forme $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ où a_n et b_n sont des coefficients réels appelés coefficients trigonométriques de la série, x étant une variable réelle.
En utilisant les relations d'Euler :
$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ et $e^{-inx} = \cos(nx) - i\sin(nx)$,
la série trigonométrique s'écrit :
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty}[\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx}]$$
On crée les coefficients exponentiels suivants :
$\forall n \in \mathbb{N}^* c_n = \dfrac{1}{2}(a_n - ib_n)$; $c_{-n} = \dfrac{1}{2}(a_n + ib_n)$ et $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$ donc la série s'écrit : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$

1.2 Remarque

On ne parle pas de b_0 . En fait , sa valeur importe peu. On peut donc prendre $b_0 = 0$.

1.3 Convergence d'une série trigonométrique

Si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| + |c_{-n}|$ (ou si les séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$) convergent alors les séries trigonométriques : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$ donc convergent uniformément sur $\mathbb{R}$

1.4 Existence du développement d'une fonction en série de Fourier

1.5 Théorème

Toute fonction à valeurs complexes T périodique et localement intégrable (il suffit d'être continue par morceaux) sur $\mathbb{R}$ admet un développement en série de Fourier : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ ou encore $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$

1.6 Formules d'Euler-Fourier

1.6.1 Calculs des coefficients trigonométriques réels a_n et b_n

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\ a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\cos(\frac{2\pi nt}{T})dt \\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})dt \end{cases}$$

Si $T = 2\pi$ alors

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(t)\cos(nt)dt \\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(t)\sin(nt)dt \end{cases}$$

- Si f est paire alors $\forall n \quad b_n = 0$.
- Si f est impaire alors $\forall n \quad a_n = 0$
- a_0 est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a; a+T]$
- $a_n cos(nt) + b_n sin(nt) = A_n cos(nt - \phi)$ s'appelle l'harmonique de rang n, A_n s'appelle l'amplitude et ϕ la phase.
  La courbe représentative de $(A_0, A_1, A_1, \cdots)$ s'appelle le spectre de fréquence du signal.
- L'harmonique de rang 1 s'appelle la fondamentale.

1.6.2 Calcul des coefficients exponentiels c_n

$$\begin{cases} c_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt \\ \\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ c_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)e^{-i2\pi nt/T}dt \end{cases}$$

Si $T = 2\pi$ alors

$$\begin{cases} c_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(t)dt \\ \\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ c_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(t)e^{-int}dt \end{cases}$$

> $restart;\ with(plots):with(student):$

> $f := x \to x^2; f(x);$

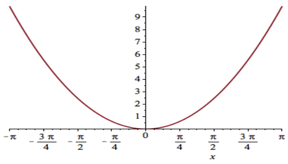
$$f := x \to x^2$$
$$x^2$$

>

CALCUL DES COEFFICIENTS DE FOURIER

> $T := 2\cdot \mathrm{Pi};\ R := -\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi};\ plot(f(x), x = R);$

$$T := 2\,\pi$$
$$R := -\pi..\pi$$



> $a := \mathbf{proc}(n)$ **option** *remember*; **local** t;
$simplify\left(\frac{2}{T}\cdot int\left(f(t)\cdot\cos\left(\frac{n\cdot 2\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right), t = -\frac{T}{2}..\frac{T}{2}\right)\right);$
end;

$b := \mathbf{proc}(n)$ **option** *remember*; **local** t;
$simplify\left(\frac{2}{T}\cdot int\left(f(t)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot 2\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right), t = -\frac{T}{2}..\frac{T}{2}\right)\right);$
end;

> $c := \mathbf{proc}(n)$
local t; **option** *remember*;
$simplify\left(\frac{1}{T}\cdot int\left(f(t)\cdot\exp\left(-\frac{2\cdot I\cdot n\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right), t = -\frac{T}{2}..\frac{T}{2}\right)\right);$
end;

$c := \mathbf{proc}(n)$ **option** *remember*; **local** t; $simplify(int(f(t)*\exp(-2*I*n*\mathrm{Pi}*t/T), t = -1/2*T..1/2*T)/T)$ **end proc**

1.7 Décroissance des coefficients de Fourier : Lemme de Rienmann-Lebesgue

> $\lim_{n\to+\infty} \int_a^{a+T} f(t)e^{-int}dt = 0\,;\ \lim_{n\to+\infty} \int_a^{a+T} f(t)\cos(nt)dt = 0\,;\ \lim_{n\to+\infty} \int_a^{a+T} f(t)\sin(nt)dt = 0$
> donc les suites des coefficients c_n, a_n et b_n décroissent vers 0

$b(n);$

$$0$$

$a(n);$

$$\frac{2\left(-2\sin(\pi n) + n^2\sin(\pi n)\pi^2 + 2n\cos(\pi n)\pi\right)}{\pi n^3}$$

for n **from** 0 **to** 15 **do** *evalf*(abs($a(n)$)) **od**;

6.579736270
4.
1.
0.4444444444
0.2500000000
0.1600000000
0.1111111111
0.08163265306
0.06250000000
0.04938271605
0.04000000000
0.03305785124
0.02777777778
0.02366863905
0.02040816327
0.01777777778

2 Conditions suffisantes de convergence d'une série de Fourier :

2.1 le Théorème de Jordan- Dirichlet

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui est 2π périodique, localement intégrable.
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent et tel que
le rapport $\frac{1}{u}[f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0)]$ reste borné au voisinage de 0.
Alors la série de Fourier de f en x converge vers vers la régularisée de Diriclet :
$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$

2.2 Remarque

$f(x+0) = \lim\limits_{t \to x^+} f(t)$ et $f(x-0) = \lim\limits_{t \to x^-} f(t)$

2.3 Corollaire

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui est 2π périodique, localement intégrable.
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent et tel que f admet en ce point des dérivées à droite et à gauche.(ce qui est le cas lorsque f est C^1par morceaux)
Alors la série de Fourier de f en x converge vers la régularisée de Diriclet :
$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$

2.4 Corollaire

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui est 2π périodique, monotone par morceaux.
Alors la série de Fourier de f en x converge vers $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ aux points x de discontinuité et vers $f(x)$ aux points de continuité

VISUALISATION DE LA COURBE DE LA SOMME PARTIELLE D'ORDRE n DE LA SERIE DE FOURIER

> $SF := \mathbf{proc}(x, n)$

$$\left(\frac{a(0)}{2} + sum\left(a(k)\cdot\cos\left(\frac{k\cdot 2\cdot \text{Pi}\cdot x}{T}\right) + b(k)\cdot\sin\left(\frac{k\cdot 2\cdot \text{Pi}\cdot x}{T}\right), k = 1..n\right)\right);$$

end;

$$SF := \mathbf{proc}(x, n)\ 1/2 * a(0) + sum(a(k) * \cos(2*k*\text{Pi}*x/T) + b(k)*\sin(2*k*\text{Pi}*x/T), k = 1..n)\ \mathbf{end\ proc}$$

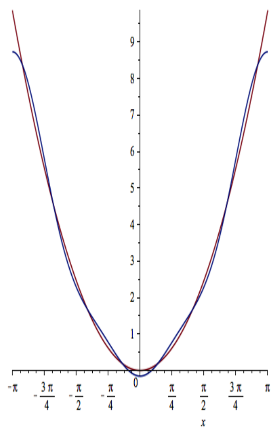
> $SF(x, 3)$;

$$\frac{1}{3}\pi^2 - 4\cos(x) + \cos(2x) - \frac{4}{9}\cos(3x)$$

> $simplify(\%)$;

$$\frac{1}{3}\pi^2 - \frac{8}{3}\cos(x) + 2\cos(x)^2 - 1 - \frac{16}{9}\cos(x)^3$$

> $plot\left(\{f(x), SF(x,3)\}, x = -\frac{\text{T}}{2}..\frac{\text{T}}{2}\right)$;



2.5 Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$ et de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

> Soit f une fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi;\pi]$ par $f(x) = x^2$.
> Déterminer la série de Fourier de f. Cette série de Fourier de f converge-t-elle vers f ?
> Déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Comme f est 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux alors f est développable en série de Fourier . $SF(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$. Comme f est paire alors $\forall n \in \mathbb{N}^*\ b_n = 0$
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+2\pi} t^2\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(nt)dt$ Soit les fonctions u et v définies par $u(t) = t^2$ et $v(t) = \frac{1}{n}\sin(nt)$. u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc on peut intégrer par parties.

$$\begin{cases} u(t) = t^2 \Rightarrow u'(t) = 2t \\ v'(t) = \cos(nt) \Leftarrow v(t) = \frac{1}{n}\sin(nt) \end{cases}$$

$\int_0^\pi t^2\cos(nt)dt = [\frac{t^2\sin(nt)}{n}]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2t}{n}\sin(nt)dt = 0 - \frac{2}{n}\int_0^\pi t\sin(nt)dt$
Soit les fonctions u et v définies par $u(t) = t$ et $v(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt)$. u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc on peut intégrer par parties.

$$\begin{cases} u(t) = t \Rightarrow u'(t) = 1 \\ v'(t) = \sin(nt) \Leftarrow v(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt) \end{cases}$$

$\int_0^\pi t\sin(nt)dt = [\frac{-t\cos(nt)}{n}]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{-1}{n}\cos(nt)dt = [\frac{-t\cos(nt)}{n} + \frac{1}{n^2}sin(nt)]_0^\pi = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}$
donc $a_n = \frac{2}{\pi}\frac{2\pi(-1)^n}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}$
$a_0 = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t^2dt = \frac{2}{\pi}[\frac{t^3}{3}]_0^\pi = \frac{2\pi^2}{3}$ Donc la série de Fourier de f est $SF(f)(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$. $\forall n \in \mathbb{N}^*\ |a_n| \leq \frac{4}{n^2}$.
Or la série de Riemann $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum a_n$ est normalement convergente donc la série de Fourier de f : $SF(x)$ converge normalement vers $f(x)$
2 cas particuliers :

1. si $x = 0$ on a $0 = f(0) = SF(f)(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$
2. si $x = \pi$ on a $\pi^2 = f(\pi) = SF(f)(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}(-1)^n$ donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

2.6 Phénomène de Gibbs

> $f := x \to piecewise(x < 0, -1, 1); f(x);$

$$f := x \to piecewise(x < 0, -1, 1)$$

$$\begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & otherwise \end{cases}$$

>

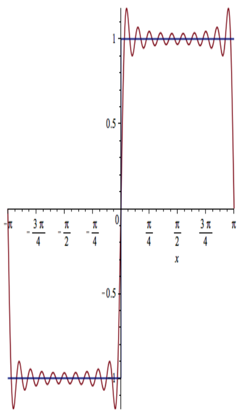
>

> $SF(x, 20);$

$$\frac{4\sin(x)}{\pi} + \frac{4}{3}\frac{\sin(3x)}{\pi} + \frac{4}{5}\frac{\sin(5x)}{\pi} + \frac{4}{7}\frac{\sin(7x)}{\pi} + \frac{4}{9}\frac{\sin(9x)}{\pi} + \frac{4}{11}\frac{\sin(11x)}{\pi} + \frac{4}{13}\frac{\sin(13x)}{\pi} + \frac{4}{15}\frac{\sin(15x)}{\pi} + \frac{4}{17}\frac{\sin(17x)}{\pi} + \frac{4}{19}\frac{\sin(19x)}{\pi}$$

>

> $plot\left(\{f(x), SF(x, 20)\}, x = -\frac{T}{2} .. \frac{T}{2}\right);$



Le phénomène de Gibbs est une déformation du signal qui est un effet de bord,d'origine mathématique, se produisant à proximité d'une discontinuité.
Ce phénomène visualise la non convergence uniforme au voisinage de $x = 0$ de la fonction.
Au niveau du point de discontinuité de f (ici x = 0), le polynôme trigonométrique n-ième de la série de Fourier, $SF_n(f)$ qui elle est une fonction continue subit une forte oscillation, une sorte de "ressaut" .
D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement aux points x de discontinuité de f vers la régularisée de Diriclet : $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.
Lorsque n devient très grand, l'amplitude des oscillations tend vers une limite strictement plus grande que l'amplitude de la discontinuité alors que la largeur de la zone d'oscillation tend vers 0.

3 Egalité de Parseval

Si f est 2π-périodique et intégrable sur $[a; a+2\pi]$
alors $\|f\|_2^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_a^{a+2\pi} |f(t)|^2 dt = \dfrac{a_0^2}{4} + \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$

L'égalité de Parseval dite parfois théorème de Parseval est une formule fondamentale de la théorie des séries de Fourier. On la doit au mathématicien français Marc-Antoine Parseval des Chênes. Elle est également appelée identité de Rayleigh du nom du physicien John William Strutt Rayleigh, prix Nobel de physique 1904. Cette formule peut être interprétée comme une généralisation du théorème de Pythagore pour les séries dans les espaces de Hilbert. Dans de nombreuses applications physiques (courant électrique par exemple), cette formule peut s'interpréter comme suit : l'énergie totale s'obtient en sommant les contributions des différents harmoniques.

1. $\|f\|_2^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_a^{a+2\pi} |f(t)|^2 dt$ s'appelle la puissance du signal
2. $\dfrac{a_0^2}{4}$ est la puissance du signal $t \mapsto a_0$
3. $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$ s'appelle la puissance de toutes les harmoniques.
4. L'égalité de Parseval exprime le principe de la conservation de la puissance.

3.1 Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ en utilisant l'égalité de PARSEVAL

Soit f une fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi; \pi]$ par $f(x) = x$.
Calculer les coefficients trigonométriques et exponentiels de la série de Fourier de f.
Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Comme f est 2π-périodique et continue par morceaux alors f est développable en série de Fourier .
$SF(f)(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$.
Comme f est impaire alors $\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n = 0$
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\sin(nt)dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+2\pi} t\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt$
Soit les fonctions u et v définies par $u(t) = t$ et $v(t) = -\dfrac{1}{n}\cos(nt)$.
u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc on peut intégrer par parties.

$$\begin{cases} u(t) = t \Rightarrow u'(t) = 1 \\ \\ v'(t) = \sin(nt) \Leftarrow v(t) = -\dfrac{1}{n}\cos(nt) \end{cases}$$

$\int_0^\pi t\sin(nt)dt = [\frac{-t\cos(nt)}{n}]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{-1}{n}\cos(nt)dt = [\frac{-t\cos(nt)}{n} + \frac{1}{n^2}sin(nt)]_0^\pi = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}$
donc $b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{i}{n}(-1)^{n+2} = \frac{i}{n}(-1)^n \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{i}{n}(-1)^{n+1} \end{cases}$$

$\|f\|_2^2 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T}|f(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi t^2dt = \frac{1}{\pi}[\frac{t^3}{3}]_0^\pi = \frac{\pi^2}{3}$
Donc $\frac{\pi^2}{3} = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2}$ donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

3.2 Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}$ et de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$

1. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction g, paire et 2π-périodique vérifiant $g(t) = \pi - 2t$ pour $0 < t < \pi$ puis compléter g par continuité pour que la série de Fourier de g converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$
2. En déduire, par intégration, la série de Fourier de la fonction f impaire, 2π-périodique définie par $f(t) = t(\pi - t)$ pour $0 < t < \pi$ après avoir prolongé f par continuité et cherché $f'_d(0)$ et $f'_g(\pi)$
3. A l'aide de la formule de Parseval, démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$ puis en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

1°) Comme g est 2π-périodique et continue par morceaux alors g est développable en série de Fourier .
$SF(g)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$.
Comme g est paire alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $b_n = 0$
$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi - 2t)dt = \frac{2}{\pi}[\pi t - t^2]_0^\pi = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi - 2t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \pi\cos(nt)dt + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi -2t\cos(nt)dt = 2[\frac{\sin(nt)}{n}]_0^\pi - \frac{4}{\pi}\int_0^\pi t\cos(nt)dt = -\frac{4}{\pi}\int_0^\pi t\cos(nt)dt$
Soit les fonctions u et v définies par $u(t) = t$ et $v(t) = \frac{1}{n}\sin(nt)$.
u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc on peut intégrer par parties.

$$\begin{cases} u(t) = t \Rightarrow u'(t) = 1 \\ \\ v'(t) = \cos(nt) \Leftarrow v(t) = \dfrac{1}{n}\sin(nt) \end{cases}$$

Alors $\int_0^\pi t\cos(nt)dt = [\dfrac{t\sin(nt)}{n}]_0^\pi - \displaystyle\int_0^\pi \dfrac{\sin(nt)}{n}dt = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^\pi \sin(nt)dt = \dfrac{1}{n^2}[\cos(nt)^2]_0^\pi = \dfrac{(-1)^n - 1}{n^2}$

Donc $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n = \dfrac{-4((-1)^n - 1)}{\pi n^2}$

donc si n est pair $a_n = 0$ et si n est impair $a_n = \dfrac{8}{\pi n^2}$

Donc la série de Fourier de g s'écrit :

$\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{8}{\pi(2n+1)^2}\cos((2n+1)x)$

On peut prolonger g par continuité en 0 et en π par $g(0) = \pi$ et $g(\pi) = -\pi$ alors comme g sera 2π-périodique, dérivable à droite et à gauche en tout point de $\mathbb{R}$ donc d'après la règle de Lejeune-Dirichlet, la série de Fourier de g converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

2°) Soit la fonction f impaire, 2π-périodique définie par $f(t) = t(\pi - t)$ pour $0 < t < \pi$. En prenant $f(0) = 0$ et $f(\pi) = 0$ on prolonge f par continuité sur $\mathbb{R}$

$f'_d(0) = \displaystyle\lim_{t\to 0^+} \dfrac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \pi = g(0)$

$f'_g(0) = \displaystyle\lim_{t\to 0^-} \dfrac{f(t) - f(0)}{t - 0} = -\pi = g(\pi)$

$f'(t) = \pi - 2t = g(t)$ pour $0 < t < \pi$

Comme f et g sont 2π-périodiques, comme g est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, comme $g = f'$ alors f et g sont toutes deux développables en séries de Fourier qui convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ respectivement vers f et g. La série de Fourier de f est obtenue en intégrant la série de Fourier de g : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{8}{\pi(2n+1)^2}\cos((2n+1)x)$

Donc la série de Fourier de f est : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{8}{\pi(2n+1)^3}\sin(nx)$

donc pour tout réel t, on a $f(t) = t(\pi - t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{8}{\pi(2n+1)^3}\sin(nt)$

3°) Comme f est 2π périodique et intégrable sur $[-\pi;\pi]$ alors d'après la formule de Bessel-Parseval, l'on a :

$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |t(\pi - t)|^2 dt = \dfrac{a_0^2}{4} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$ donc

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |t(\pi - t)|^2 dt = \pi\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{64}{\pi^2(2n+1)^6}$ d'où $[\dfrac{\pi^2 t^2}{3} - 2\pi\dfrac{t^4}{4} + \dfrac{t^5}{5}]_{-\pi}^{\pi} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{64}{(2n+1)^6}$

donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{64}{(2n+1)^6} = \dfrac{16\pi^6}{15}}$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^6} = \dfrac{\pi^6}{60}}$