Produit Scalaire de vecteurs du plan

Christian CYRILLE

10 décembre 2014

"Il ne s'agit ni de rire, ni de pleurer mais de comprendre"
Spinoza

1 4 définitions équivalentes

1.1 Définition 1

Soit des points A, B et C du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On appelle $\|\vec{u}\|$ la distance AB et $\|\vec{v}\|$ la distance AC
Alors on définit ainsi le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} 0 \ si \ \vec{u} = \vec{0} \ ou \ \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}.\vec{v}) \ si \ \vec{u} \neq \vec{0} \ et \ \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Donc lorsque $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})$
On peut alors définir le carré scalaire :

$$\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = || \vec{u} || \times || \vec{u} || \times \cos(\vec{u}.\vec{u}) = || \vec{u} || \times || \vec{u} || \times \cos(0) = || \vec{u} ||^2$$

Donc

$$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = || \overrightarrow{AB} || \times || \overrightarrow{AB} || \ cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = AB \times AB = AB^2$$

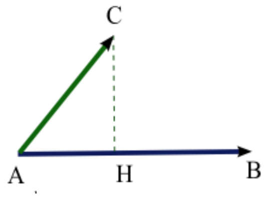
1.2 CNS d'orthogonalité

$\forall \vec{u} \in \vec{P} \quad \forall \vec{v} \in \vec{P} \quad \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\iff \vec{u}.\vec{v} = 0$

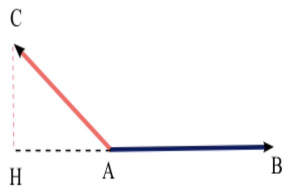
1.2.1 Démonstration

- Par convention, $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur $\vec{v}$
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$ donc :
  $\vec{u}.\vec{v} = 0 \iff \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

1.3 Définition 2



> Dans ce premier cas , $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) = AB \times AH = \overline{AB} \times \overline{AH}$



> Dans ce deuxième cas , les angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH})$ sont supplémentaires donc ont des cosinus opposés : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) = -AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}) = -AB \times AH = \overline{AB} \times \overline{AH}$

1.4 Culture générale Mathématique à admettre

Un plan P muni d'un produit scalaire est appelé un **plan affine euclidien** P. Le produit scalaire est en fait une application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \vec{P} \times \vec{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}, \vec{v}) & \longmapsto & \phi(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}.\vec{v} \end{array}$$

qui est une **forme bilinéaire symétrique définie positive** :

1. $P_1 : \forall \vec{u} \in \vec{P} \ \forall \vec{v} \in \vec{P} \quad \vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
2. $P_2 : \forall \vec{u_1} \in \vec{P} \quad \forall \vec{u_2} \in \vec{P} \quad \forall \vec{v} \in \vec{P} \quad (\vec{u_1} + \vec{u_2}).\vec{v} = \vec{u_1}.\vec{v} + \vec{u_2}.\vec{v}$
3. $P_3 : \forall \vec{u} \in \vec{P} \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda \vec{u}).\vec{v} = \lambda \ \vec{u}.\vec{v}$
4. $P_4 : \forall \vec{u} \in \vec{P} \quad \vec{u}.\vec{u} \geq 0$
5. $P_5 : \forall \vec{u} \in \vec{P} \quad \vec{u}.\vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

Commentaires :

- P_1 exprime la symétrie du produit scalaire
- P_2 et P_3 sont les propriétés qui expriment la linéarité par rapport au premier vecteur. Associés à la P_1 on obtient :
  - $P_2' : \forall \vec{u} \in \vec{P} \quad \forall \vec{v_1} \in \vec{P} \ \forall \vec{v_2} \in \vec{P} \quad \vec{u}.(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = \vec{u}.\vec{v_1} + \vec{u}.\vec{v_2}$
  - $P_3' : \forall \vec{u} \in \vec{P} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\vec{u}).\lambda \vec{v} = \lambda \ \vec{u}.\vec{v}$

qui expriment la linéarité par rapport au deuxième vecteur.

1.5 Définition 3

1. Dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$
2. Par conséquent $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$
3. Dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$,
   si $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$
   alors
   - $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} x_A - x \\ y_A - y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} x_B - x \\ y_B - y \end{pmatrix}$
   - $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (x_A - x)(x_B - x) + (y_A - y)(y_B - y)$

Comme $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée alors $\vec{i}.\vec{j} = 0$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$
Par conséquent, $\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}).(x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx'\vec{i}.\vec{i} + xx'\vec{i}.\vec{j} + yx'\vec{j}.\vec{i} + yy'\vec{j}.\vec{i} = xx' + yy'$

1.6 Définition 4

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{v} - \vec{u}||^2]$

Dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors alors $\vec{v} - \vec{u}\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$ donc
$\frac{1}{2}[||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{v} - \vec{u}||^2] = \frac{1}{2}[(x^2 + y^2) + (x'^2 + y'^2) - ((x - x')^2 + (y - y')^2)] = \frac{1}{2}(2xx' + 2yy') = xx' + yy' = \vec{u}.\vec{v}$

1.7 Identités scalaires remarquables

1. $P_6 : \forall \vec{u} \in \vec{P}\ \forall \vec{v} \in \vec{P} \quad (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
2. $P_7 : \forall \vec{u} \in \vec{P}\ \forall \vec{v} \in \vec{P} \quad (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
3. $P_8 : \forall \vec{u} \in \vec{P}\ \forall \vec{v} \in \vec{P} \quad (\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

1.7.1 Démonstration

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
$(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
$(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} - \vec{v}.\vec{v} = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

> On peut retrouver $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}[||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{v} - \vec{u}||^2]$ avec des identités remarquables scalaires

$\dfrac{1}{2}[||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{v} - \vec{u}||^2] = \dfrac{1}{2}[\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - (\vec{v} - \vec{u})^2] = \dfrac{1}{2}[\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - \vec{v}^2 - \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}] = \dfrac{1}{2}2\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}$

2 Applications du produit scalaire

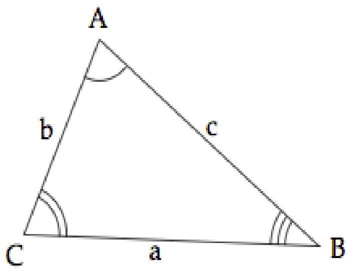
2.1 Formules d'Al-Kashi

Dans le plan affine euclidien, soit un triangle propre ABC. On note $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$;S l'aire du triangle ABC, R le rayon du cercle circonscrit à ABC ;$\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ les réels appartenant à $]0;\pi[$ mesures respectives des angles géométriques $\widehat{BAC}$,$\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$
Voici les formules dites des cosinus ou formules d'Al-Kashi :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\ b\ c\ cos(\widehat{A})}$$

$$\boxed{b^2 = c^2 + a^2 - 2\ c\ a\ cos(\widehat{B})}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2\ a\ b\ cos(\widehat{C})}$$

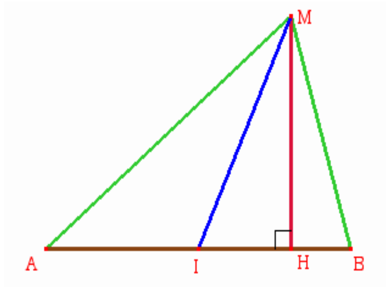


2.1.1 Démonstration

$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
$= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a^2 + b^2 - 2b\ c\cos(\widehat{A})$ Ces formules s'appellent aussi **les Formules de Pythagore généralisées**
si le triangle ABC est rectangle en A alors $\cos(\widehat{A}) = 0$ donc on retrouve le théorème de Pythagore

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

2.2 Application : Les 3 Formules de la médiane



Dans le plan affine euclidien, soit un triangle MAB. On appelle I le milieu de $[AB]$ et H le pied de la hauteur issue de M Alors :

1. $\boxed{MA^2 + MB^2 = 2\ MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}}$
2. $\boxed{MA^2 - MB^2 = 2\ \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 2\ \overline{IH} \times \overline{AB}}$
3. $\boxed{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}}$

2.2.1 Démonstration

1. $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$
   $= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$
   $= MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2$
   $= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 2MI^2 + 2IA^2 + 2\overrightarrow{MI}.\vec{0}$
   $= 2MI^2 + 2(\dfrac{AB}{2})^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$
2. $MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$
   $= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 - \overrightarrow{MI}^2 - 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IB}^2$
   $= MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 - MI^2 - 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} - IB^2$
   $= IA^2 - IB^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI}.\vec{BA}$
   $= 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 2\overline{IH} \times \overline{AB}$
3. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$
   $= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2$
   $= MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$

2.2.2 Lignes de niveau

Déterminer

1. L'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = k$ où k est un paramètre réel. Discuter si nécessaire.
2. L'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = k$ où k est un paramètre réel. Discuter si nécessaire.
3. L'ensemble Γ_3 des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ où k est un paramètre réel. Discuter si nécessaire.

1. $M \in \Gamma_1 \iff MA^2 + MB^2 = k \iff 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2} = k$

   $\iff 2MI^2 = k - \dfrac{AB^2}{2} \iff MI^2 = \dfrac{1}{2}(k - \dfrac{AB^2}{2})$
   - si $k - \dfrac{AB^2}{2} < 0$ alors $\Gamma_1 = \emptyset$
   - si $k - \dfrac{AB^2}{2} = 0$ alors $\Gamma_1 = \{I\}$
   - si $k - \dfrac{AB^2}{2} > 0$ alors $\Gamma_1 =$ *le cercle de centre I et de rayon* $\sqrt{\dfrac{1}{2}(k - \dfrac{AB^2}{2})}$
2. $M \in \Gamma_2 \iff MA^2 - MB^2 = k \iff 2\overline{IH} \times \overline{AB} = k \iff \overline{IH} = \dfrac{k}{\overline{AB}}$

   Par conséquent Γ_2 est la droite perpendiculaire à la droite (AB) au point H tel que $\overline{IH} = \dfrac{k}{\overline{AB}}$
3. $M \in \Gamma_3 \iff \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k \iff MI^2 - \dfrac{AB^2}{4} = k \iff MI^2 = k + \dfrac{AB^2}{4}$
   - si $k + \dfrac{AB^2}{4} < 0$ alors $\Gamma_3 = \emptyset$
   - si $k + \dfrac{AB^2}{4} = 0$ alors $\Gamma_3 = \{I\}$
   - si $k + \dfrac{AB^2}{4} > 0$ alors $\Gamma_3 =$ *le cercle de centre I et de rayon* $\sqrt{\dfrac{1}{2}(k + \dfrac{AB^2}{4})}$

2.3 Application : ligne de niveau $\Gamma_k = \{M \in Plan / \dfrac{MA}{MB} = k\}$ où $k \in \mathbb{R}$, $A \neq B$

2.3.1 Théorème

1. Si $k < 0$ alors $\Gamma_k = \emptyset$
2. Si $k = 0$ alors $\Gamma_k = \{A\}$
3. Si $k = 1$ alors $\Gamma_k =$ la médiatrice de $[AB]$
4. Si $k > 0$ et $k \neq 1$ alors $\Gamma_k =$ le cercle de diamètre $[G_1G_2]$ où

$$\begin{cases} G_1 = bar(\{(A,1);(B;-k)\} \\ G_2 = bar(\{(A,1);(B;k)\} \end{cases}$$

Ce cercle s'appelle le cercle d'Appolonius de Perga associé à k, A et B.

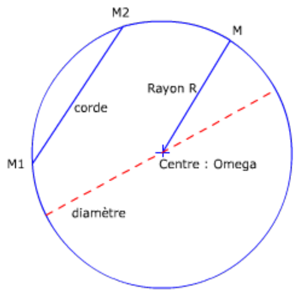
Démonstration :

1. Si $k < 0$ alors $\Gamma_k = \emptyset$ car $\dfrac{MA}{MB} \geq 0$ puisque $MA \geq 0$ et $MB > 0$
2. Si $k = 0$ alors $\Gamma_k = \{A\}$ car $\dfrac{MA}{MB} = 0 \Longleftrightarrow MA = 0 \Longleftrightarrow M = A$
3. Si $k = 1$ alors $\Gamma_k =$ la médiatrice de $[AB]$
   car $\dfrac{MA}{MB} = 1 \Longleftrightarrow MA = MB \Longleftrightarrow M \in$ la médiatrice de $[AB]$
4. Si $k > 0$ et $k \neq 1$ alors :
   $\dfrac{MA}{MB} = k \Longleftrightarrow MA = kMB$
   $\Longleftrightarrow MA^2 = k^2MB^2$ car $MA \geq 0$ et $kMB \geq O$
   $\Longleftrightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - k^2\overrightarrow{MB}^2 = 0$
   $\Longleftrightarrow (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0$
   $\Longleftrightarrow (1-k)\overrightarrow{MG_1}.(1+k)\overrightarrow{MG_2} = 0$
   où $G_1 = bar(\{(A,1);(B;-k)\}$ et $G_2 = bar(\{(A,1);(B;k)\}$
   $\Longleftrightarrow (1-k^2)\overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = 0$
   $\Longleftrightarrow \overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = 0$ car $1 - k^2 \neq 0$
   $\Longleftrightarrow M \in$ cercle de diamètre $[G_1G_2]$
   donc $\Gamma_k =$ le cercle de diamètre $[G_1G_2]$ où

$$\begin{cases} G_1 = bar(\{(A,1);(B;-k)\} \\ G_2 = bar(\{(A,1);(B;k)\} \end{cases}$$

2.4 Equations cartésiennes d'un cercle

2.4.1 Définitions



Soit R un réel ≥ 0 et Ω un point du plan P.
On appelle cercle de centre Ω et de rayon R l'ensemble des points M situés à la distance R de Ω.

- $\mathcal{C}(\Omega, R) = \{M \in P / \Omega M = R\}$
- $\{M \in P / \Omega M < R\}$ s'appelle le disque ouvert de centre Ω et de rayon R. C'est l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$
- $\{M \in P / \Omega M \leq R\}$ s'appelle le disque fermé de centre Ω et de rayon R.
- $\{M \in P / \Omega M > R\}$ est l'extérieur du cercle $\mathcal{C}$
- On appelle corde de $\mathcal{C}$ tout segment $[M_1 M_2]$ où $M_1 \in \mathcal{C}$ et $M_2 \in \mathcal{C}$
- On appelle diamètre de $\mathcal{C}$ toute corde passant par le centre Ω. La longueur d'un diamètre vaut $2R$

2.4.2 Equation cartésienne du cercle connaissant le centre et le rayon

Soit un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ tels que $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$.
$M(x; y) \in \mathcal{C}(\Omega, R) \iff \Omega M = R \iff \Omega M^2 = R^2$
$\iff (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$
$\iff x^2 + y^2 - 2x x_\Omega - 2y y_\Omega + x_\Omega^2 + y_\Omega^2 - R^2 = 0$

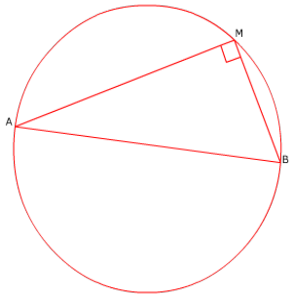
2.4.3 Exemple

Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}(O, R)$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.
$M(x; y) \in \mathcal{C}(O, R) \iff OM = R \iff OM^2 = R^2$
$\iff (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = R^2 \iff x^2 + y^2 = R^2$

2.4.4 Exemple

Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}(\Omega, 4)$ où $\Omega(2; -3)$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.
$M(x; y) \in \mathcal{C}(\Omega, 4) \iff \Omega M = 4 \iff \Omega M^2 = 16$
$\iff (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16 \iff x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 16$
$\iff x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3 \iff x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

2.4.5 Equation cartésienne du cercle connaissant un diamètre



Soit un cercle de diamètre $[AB]$ tels que $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.
$M(x; y) \in \mathcal{C}(diametre[AB]) \iff$ le triangle MAB est rectangle en M $\iff$ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \iff (x_A - x)(x_B - x) + (y_A - y)(y_B - y) = 0$
$\iff x^2 + y^2 - x(x_A + x_B) - y(y_A + y_B) + x_A x_B + y_A y_B = 0$

2.4.6 Problème réciproque

Qu'est ce l'ensemble Γ dont une équation cartésienne dans le repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ est $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$?
On peut utiliser la décomposition canonique :
$M \in \Gamma \iff (x + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} + (y + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0$
$\iff (x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$
$\iff \Omega M^2 = K$ où $K = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$ et $\Omega(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2})$
De trois choses l'une :
- ou bien $K < 0$ alors $\Gamma = \emptyset$
- ou bien $K = 0$ alors $\Gamma = \{\Omega\}$ un cercle-point car le rayon est nul
- ou bien $K > 0$ alors $\Gamma = \mathcal{C}(\Omega, \sqrt{K})$

2.4.7 Exemple 1

Déterminer $\Gamma : x^2 + y^2 + x + y + 1 = 0$ dans un repère orthonormé

Corrigé :
$M \in \Gamma \iff (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0$
$\iff (x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{2}$
$\iff \Omega M^2 = -\frac{1}{2}$ où $\Omega(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$
Alors $\Gamma = \emptyset$

2.4.8 Exemple 2

> Déterminer $\Gamma : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$ dans un repère orthonormé

Corrigé :
$M \in \Gamma \iff (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 5 = 0$
$\iff (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$
$\iff \Omega M^2 = 0$ où $\Omega(1;2)$
$\iff \Omega M = 0 \iff M = \Omega$
Alors $\Gamma = \{\Omega\}$

2.4.9 Exemple 3

> Déterminer $\Gamma : x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ dans un repère orthonormé

Corrigé :
$M \in \Gamma \iff (x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 - 3 = 0$
$\iff (x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$
$\iff \Omega M^2 = 16$ où $\Omega(-2;3)$
$\iff \Omega M = 4$
Alors $\Gamma = \mathcal{C}(\Omega, 4)$

2.5 Orthogonalité de deux droites

2.5.1 CNS

> Soit le plan P muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.
> Soit la droite $(D) : ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
> Soit la droite $(D') : a'x + b'y + c' = 0$ avec $(a', b') \neq (0, 0)$.
> On sait qu'un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et qu'un vecteur directeur de (D') est $\vec{v}\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$.
> Alors :
>
> $$(D) \perp (\Delta') \iff \vec{u} \; et \; \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \iff \vec{u}.\vec{v} = 0 \iff aa' + bb' = 0$$

2.5.2 Corollaire

> Dans le cas où (D) et (D') sont toutes deux non parallèles à l'axe des ordonnées alors :
> $(D) : y = mx + p$ de pente ou de coefficient directeur m et d'ordonnée à l'origine p.
> $(D') : y = m'x + p'$ de pente ou de coefficient directeur m' et d'ordonnée à l'origine p'.
> Comme $y = mx + p \iff mx - y + p = 0$ alors un vecteur directeur de D est alors $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

De même, un vecteur directeur de D' est alors $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$.
Par conséquent,

$$(D)\perp(\Delta') \iff \vec{u} \; et \; \vec{v} \text{ sont orthogonaux } \iff \vec{u}.\vec{v}=0 \iff 1+mm'=0$$

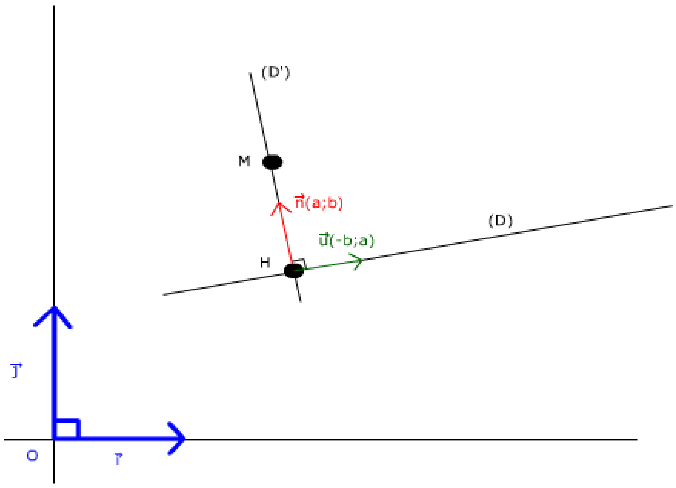
$$\iff mm'=-1 \iff \text{le produit des pentes vaut -1}$$

On rappelle que

$$(D)//(\Delta') \iff \vec{u} \; et \; \vec{v} \text{ sont colinéaires } \iff det(\vec{u},\vec{v})=0 \iff \begin{vmatrix}1 & 1\\ m & m'\end{vmatrix}=0$$

$$\iff m'-m=0 \iff m=m' \iff \text{les pentes des deux droites sont égales}$$

2.5.3 Vecteur normal



Dans un repère orthonormé , si une droite (D) a pour équation $ax+by+c=0$ où $(a,b)\neq(0,0)$ alors :

- le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$de (D)
- On dit que $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D).
- Bien entendu , tout vecteur $\lambda\vec{n}$ où $\lambda\in\mathbb{R}^*$ est aussi un vecteur normal à (D).
- Toute droite orthogonale à (D) a une équation cartésienne de la forme $-bx+ay+d=0$ où d est un réel qu'il reste à déterminer.

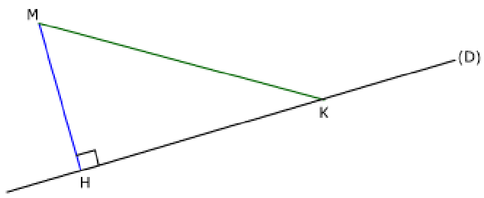
2.5.4 Démonstration

- Un vecteur directeur de (D) : $ax+by+c=0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. Si l'on pose $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ on constate que $\vec{u}.\vec{n}=(-b)a+ab=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. On dira alors que $\vec{n}$ est un vecteur normal à (D)

- De même, $\vec{u}.\lambda\vec{n} = \lambda(\vec{u}.\vec{n}) = \lambda 0 = 0$ donc $\lambda\vec{n}$ est aussi un vecteur normal à (D).
- Soit (D') la droite orthogonale en $H\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix}$ à la droite (D).Soit $M \in (D')$.
  Alors le projeté orthogonal de M sur la droite (D) est H. D'où :
  $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D') \iff (\overrightarrow{MH}, \vec{n})$est liée $\iff det(\overrightarrow{MH}, \vec{n}) = 0$
  $\iff \begin{vmatrix} x_H - x & a \\ y_H - y & b \end{vmatrix} = 0 \iff b(x_H - x) - a(y_H - y) = 0$
  $\iff -bx + ay + bx_H - ay_H = 0 \iff -bx + ay + d + 0$ où $d = bx_H - ay_H$

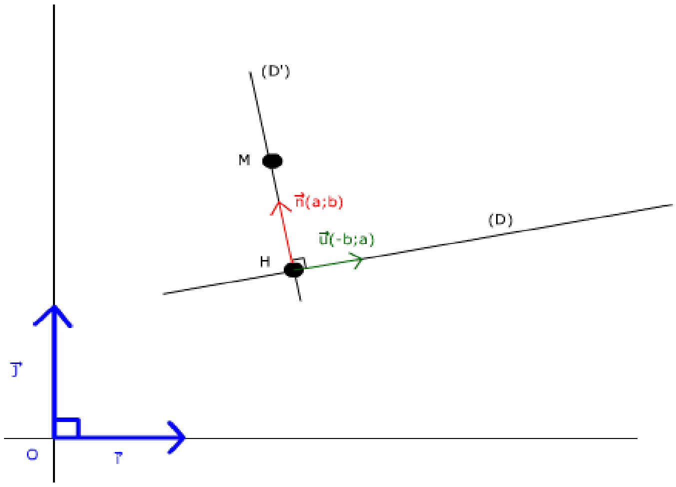
2.6 Distance d'un point à une droite

2.6.1 Lemme



Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (D). Soit K un point quelconque de (D).
D'après le théorème de Pythagore, l'on a : $MK^2 = MH^2 + HK^2$. or $HK^2 \geq 0$ donc $MK^2 \geq MH^2$ donc $MK \geq MH$.
Par conséquent, la plus petite longueur des segments $[MK]$ où $K \in (D)$ est donc MH. On dit que c'est la distance du point M à la droite (D).

2.6.2 Théorème



> Dans un repère orthonormé , si une droite (D) a pour équation $ax+by+c=0$ où $(a,b) \neq (0,0)$ et si $M\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$
> alors la distance du point M à la droite (D) est
> $$d(M,(D)) = \frac{\mid ax_M + by_M + c \mid}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

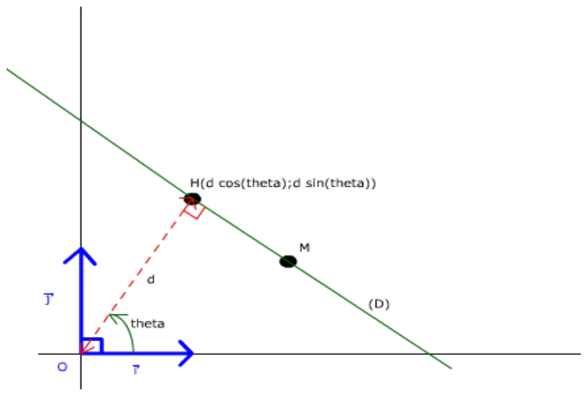
Démonstration :

Calculons le produit scalaire $\vec{n}.\overrightarrow{HM}$ de deux façons :

- $\vec{n}.\overrightarrow{HM} = || \vec{n} || \times || \overrightarrow{HM} || \times \cos(\vec{n},\overrightarrow{HM}) = \varepsilon \, || \vec{n} || \times || \overrightarrow{HM} ||$ où $\varepsilon = \pm 1$ car $(\vec{n},\overrightarrow{HM})$ mesure soit 0 radian soit π radians donc $\cos(\vec{n},\overrightarrow{HM}) = \pm 1$
- Comme l'on connaît les coordonnées de $\vec{n}$ et de $\overrightarrow{HM}$ alors :
  $\vec{n}.\overrightarrow{HM} = a(x_M - x_H) + b(y_M - y_H) = ax_M + by_M - (ax_H + by_H) = ax_M + by_M - c$
  puisque $H\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix} \in (D) : ax+by+c=0$
- Donc $\varepsilon \, || \vec{n} || \times || \overrightarrow{HM} || = ax_M + by_M - c.$
  Comme $|| \overrightarrow{HM} || = HM$ et $|| \vec{n} || = \sqrt{a^2+b^2}$
  D'où $HM = \dfrac{\mid ax_M + by_M + c \mid}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2.7 Equation normale d'une droite ne passant par O

2.7.1 Théorème



Dans un repère orthonormé de centre O , si **une droite** (D)**ne passe par** O et est telle que $d(O,(D)) = d$ alors :
une équation cartésienne de (D) est : $x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = d$.
Cette équation s'appelle une équation normale de (D).

Démonstration :
$M\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} \in (D) \iff \overrightarrow{MH}$ *et* $\overrightarrow{OH}$ sont orthogonaux $\iff \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{OH} = 0$
$\iff (d\cos(\theta) - x)(d\cos(\theta)) + (d\sin(\theta) - y)(d\sin(\theta)) = 0$
$\iff d^2\cos^2(\theta) - xd\cos(\theta) + d^2\sin^2(\theta) - yd\sin(\theta) = 0$
$\iff d^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) - xd\cos(\theta) - yd\sin(\theta) = 0$
$\iff d^2 - d(x\cos(\theta) + y\sin(\theta)) = 0 \iff d[d - (x\cos(\theta) + y\sin(\theta))] = 0$
$\iff d - (x\cos(\theta) + y\sin(\theta)) = 0$ car $d \neq 0$
$\iff x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = d$

2.8 Formules de multiplication des arcs

Si $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b) \\ cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b) \\ sin(a+b) = sin(a)cos(b) + sin(b)cos(a) \\ sin(a-b) = sin(a)cos(b) - sin(b)cos(a) \end{cases}$$

Si $a \in D_{tan}, \quad b \in D_{tan}, \quad a+b \in D_{tan}$

$tan(a+b) = \dfrac{tan(a) + tan(b)}{1 - tan(a)tan(b)}$

Si $a \in D_{tan}, \quad b \in D_{tan}, \quad a-b \in D_{tan}$

$tan(a-b) = \dfrac{tan(a) - tan(b)}{1 + tan(a)tan(b)}$

Si $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} cos(2a) = cos^2(a) - sin^2(a) = 2cos^2(a) - 1 = 1 - 2sin^2(a) \\ sin(2a) = 2\ sin(a)cos(a) \\ \\ cos^2(a) = \dfrac{1+cos(2a)}{2} \\ sin^2(a) = \dfrac{1-cos(2a)}{2} \\ \\ cos^2(\dfrac{a}{2}) = \dfrac{1+cos(a)}{2} \\ sin^2(\dfrac{a}{2}) = \dfrac{1-cos(a)}{2} \\ \\ cos^2(\dfrac{a}{4}) = \dfrac{1+cos(\dfrac{a}{2})}{2} \\ sin^2(\dfrac{a}{4}) = \dfrac{1-cos(\dfrac{a}{2})}{2} \end{cases}$$

2.9 Formules de transformations de sommes en produits

on a donc

$$\begin{cases} cos(a)cos(b) = \dfrac{1}{2}[cos(a+b) + cos(a-b)] \\ sin(a)sin(b) = -\dfrac{1}{2}[cos(a+b) - cos(a-b)] \\ sin(a)cos(b) = \dfrac{1}{2}[sin(a+b) + sin(a-b)] \end{cases}$$

En posant

$$\begin{cases} a+b = p \\ a-b = q \end{cases}$$

c'est-à-dire

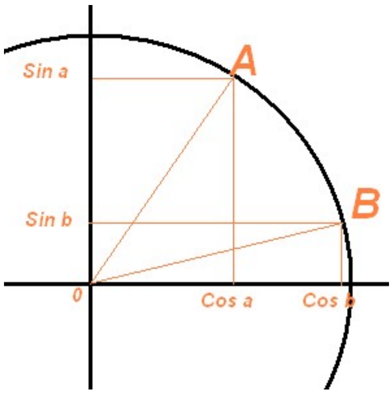
$$\begin{cases} a = \dfrac{p+q}{2} \\ b = \dfrac{p-q}{2} \end{cases}$$

on a donc

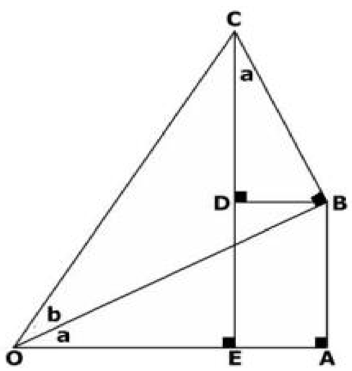
$$\begin{cases} cos(p) + cos(q) = 2cos(\frac{p+q}{2})cos(\frac{p-q}{2}) \\ cos(p) - cos(q) = -2sin(\frac{p+q}{2})sin(\frac{p-q}{2}) \\ sin(p) + sin(q) = 2sin(\frac{p+q}{2})cos(\frac{p-q}{2}) \\ sin(p) - sin(q) = 2sin(\frac{p-q}{2})cos(\frac{p+q}{2}) \end{cases}$$

Pour démontrer le tout il faut savoir seulement démontrer

$$\begin{cases} cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b) \\ sin(a+b) = sin(a)cos(b) + sin(b)cos(a) \end{cases}$$



- $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OBcos(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}) = cos(a-b)$
- comme $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées $(cos(a), sin(a))$ et que $\overrightarrow{OB}$ a pour coordonnées $(cos(b), sin(b))$ alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$
- d'où $cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$



$sin(a+b) = \frac{CE}{OC} = \frac{CD+DE}{OC} = \frac{CBcos(a)}{OC} + \frac{BA}{OC} = \frac{CB}{OC}cos(a) + \frac{BA}{OC} = sin(b)cos(a) + \frac{OBsin(a)}{OC} = sin(b)cos(a) + sin(a)\frac{OB}{OC} = sin(b)cos(a) + sin(a)cos(b)$

3 Exercices

3.1

Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ lorsque :

1. $\|\vec{u}\| = 3; \|\vec{v}\| = 3$ et que $(\vec{u}, \vec{v})$ mesure $\dfrac{\pi}{3}$

3.2

Soit un trapéze rectangle $ABCD$ rectangle en A et en D tel que $AB = 5; AD = 4$ et $CD = 8$

1. Faites une figure à main levée.
2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA}$

3.3

Pour définir la formule $tan(a + b) = \dfrac{tan(a) + tan(b)}{1 - tan(a)tan(b)}$ on n'a besoin que de 3 conditions :

- $a \in D_{tan}$
- $b \in D_{tan}$
- $a + b \in D_{tan}$

Pourquoi n'a -t-on pas besoin de la condition $1 - tan(a)tan(b) \neq 0$?