Devoir sur la Partie Entière d'un nombre réel

Professeur : Christian CYRILLE

Pour jeudi 10 novembre 2011

On admet que tout réel x est compris entre 2 entiers relatifs consécutifs n et $n+1$ c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists$ un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. Cet entier n qui est **le plus grand entier relatif précédant x s'appelle la partie entière de x** . On le note $Ent(x)$ ou $[x]$ en Mathématiques. On a donc

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

1. Tracer avec précision dans un repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ la courbe représentative de la fonction partie entière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ qui , à tout réel x associe $[x]$. Pour le graphique, on prendra $x \in [-4; 4]$
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ $[x+k] = [x] + k$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$ encadrer le nombre $x - [x]$
4. Démontrer que l'application $epi : \mathbb{R} \mapsto [0; 1[$ qui à tout réel x associe $epi(x) = x - [x]$ est périodique. Quelle est sa période ? Dessiner la courbe représentative de epi dans un autre repère pour $x \in [-4; 4]$
5. Exprimer $[-x]$ en fonction de $[x]$. Justifier.
6. Dessiner avec précision les courbes des fonctions suivantes dans des repères différents :
   (a) f définie sur $[-4; 4]$ par$f(x) = [|x|]$
   (b) g définie sur $[-2; 2]$ par $g(x) = [2x]$
   (c) h définie sur $[-1; 1]$ par $h(x) = [3x]$
   (d) i définie sur $[-4; 4]$ par $i(x) = [\dfrac{x}{2}]$
   (e) j définie sur $[-6; 6]$ par $j(x) = [\dfrac{x}{3}]$
   (f) k définie sur $[-2; 2]$ par $k(x) = [x^2]$
   (g) l définie sur $[0; 9]$ par $l(x) = [\sqrt{x}]$

   Pour chaque graphique, une justification est demandée. Attention aux bornes des intervalles.
7. Déterminer puis dessiner avec précision dans un repère orthonormé l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ tels que $[x]^2 + [y]^2 = 0$
8. Soient les fonctions :
   $\delta : x \mapsto [\dfrac{1}{x^2+1}]$; $\omega : x \mapsto [\dfrac{x}{x^2+1}]$ et $s : x \mapsto \omega(x) - \omega(-x)$

   (a) Déterminer $\delta(x)$, $\omega(x)$ et $s(x)$ en fonction de x. Dessiner leurs courbes.
   (b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$ l'on a : $x([\dfrac{x}{x^2+1}] - [\dfrac{-x}{x^2+1}]) = |x|$