Partie Entière d'un nombre réel

Professeur : Christian CYRILLE

12 mai 2017

On admet que tout réel x est compris entre 2 entiers relatifs consécutifs n et $n+1$ c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists$ un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. Cet entier n qui est le plus grand entier relatif précédant x s'appelle la partie entière de x . On le note $Ent(x)$ ou $[x]$ en Mathématiques. On a donc $[x] \leq x < [x]+1$

1. — si $-4 \leq x < -3$ alors $[x] = -4$
   — si $-3 \leq x < -2$ alors $[x] = -3$
   — si $-2 \leq x < -1$ alors $[x] = -2$
   — si $-1 \leq x < 0$ alors $[x] = -1$
   — si $0 \leq x < 1$ alors $[x] = 0$
   — si $1 \leq x < 2$ alors $[x] = 1$
   — si $2 \leq x < 3$ alors $[x] = 2$
   — si $3 \leq x < 4$ alors $[x] = 3$
   — si $x = 4$ alors $[x] = 4$

   Voici donc dans un repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ la courbe représentative de la fonction partie entière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ qui , à tout réel x associe $[x]$. Pour le graphique, on prendra $x \in [-4; 4]$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$ alors $[x] \leq x < [x]+1$ donc $\forall k \in \mathbb{Z}$ $[x]+k \leq x+k < [x]+1+k$. Or $[x]+k$ et $[x]+k+1$ sont deux entiers consécutifs donc $\boxed{[x+k] = [x]+k}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$ comme $[x] \leq x < [x]+1$ alors $[x]-[x] \leq x-[x] < [x]+1-[x]$ donc $\boxed{0 \leq x-[x] < 1}$. Lorsque x est un réel positif alors $x-[x]$ s'appelle aussi la partie décimale de x
4. Soit $k \in \mathbb{Z}^*$ alors l'application $epi : \mathbb{R} \mapsto [0; 1[$ qui à tout réel x associe $epi(x) = x - [x]$ est périodique de période k car :
   — L'ensemble de définition de epi qui est $\mathbb{R}$ est tel que $\forall x \in D_{epi}$ on $x+k \in D_{epi}$
   — $\forall x \in D_{epi}$ $epi(x+k) = (x+k)-[x+k] = x+k-([x]+k) = x-[x] = epi(x)$

   La plus petite période k strictement positive est 1 donc "la" période de $x \mapsto [x]$ est 1.
   La courbe représentative de epi ressemble à un champ d'épis dans un autre repère pour $x \in [-4; 4]$
5. Si $[x] \leq x < [x]+1$ alors $-[x] \geq -x > -[x]-1$ donc $-[x]-1 < -x \leq -[x]$
   Donc pour exprimer $[-x]$ en fonction de $[x]$, il faudra distinguer 2 cas :
   (a) **ou bien x est un entier relatif** k alors $-x$ est l'entier $-k$ aussi donc $[-x] = [-k] = -k = -[x]$ donc $\boxed{[-x] = -[x]}$

(b) **ou bien x n'est pas entier** alors $[x] < x < [x]+1$
alors $-[x] > -x > -[x]-1$ donc $-[x]-1 < -x < -[x]$. Et comme $-[x]-1$ et $-[x]$ sont des entiers consécutifs alors $\boxed{[-x] = -[x]-1}$

6. Nous allons dessiner avec précision les courbes des fonctions suivantes dans des repères différents :

(a) f définie sur $[-4;4]$ par $f(x) = [|x|]$
L'ensemble de définition D_f est centré en 0 et $\forall x \in D_f\ f(-x) = f(x)$ donc f est paire donc on étudie f sur $[0;4]$ et on complète la courbe en utilisant la symétrie orthogonale d'axe l'axe des ordonnées.

(b) g définie sur $[-2;2]$ par $g(x) = [2x]$

— si $-2 \leq x < \dfrac{-3}{2}$ alors $-4 \leq 2x < -3$ donc $[2x] = -4$
— si $\dfrac{-3}{2} \leq x < -1$ alors $-3 \leq 2x < -2$ donc $[2x] = -3$
— si $-1 \leq x < \dfrac{-1}{2}$ alors $-2 \leq 2x < -1$ donc $[2x] = -2$
— si $\dfrac{-1}{2} \leq x < 0$ alors $-1 \leq 2x < 0$ donc $[2x] = -1$
— si $0 \leq x < \dfrac{1}{2}$ alors $0 \leq 2x < 1$ donc $[2x] = 0$
— si $\dfrac{1}{2} \leq x < 1$ alors $1 \leq 2x < 2$ donc $[2x] = 1$
— si $1 \leq x < \dfrac{3}{2}$ alors $2 \leq 2x < 3$ donc $[2x] = 2$
— si $\dfrac{3}{2} \leq x < 2$ alors $3 \leq 2x < 4$ donc $[2x] = 3$
— si $x = 2$ alors $2x = 4$ donc $[2x] = 4$

(c) h définie sur $[-1;1]$ par $h(x) = [3x]$

— si $-1 \leq x < \dfrac{-2}{3}$ alors $-3 \leq 3x < -2$ donc $[3x] = -3$
— si $\dfrac{-2}{3} \leq x < \dfrac{-1}{3}$ alors $-2 \leq 3x < -1$ donc $[3x] = -2$
— si $\dfrac{-1}{3} \leq x < 0$ alors $-1 \leq 3x < 0$ donc $[3x] = -1$
— si $0 \leq x < \dfrac{1}{3}$ alors $0 \leq 3x < 1$ donc $[3x] = 0$
— si $\dfrac{1}{3} \leq x < \dfrac{2}{3}$ alors $1 \leq 3x < 2$ donc $[3x] = 1$
— si $\dfrac{2}{3} \leq x < 1$ alors $2 \leq 3x < 3$ donc $[3x] = 2$
— si $x = 1$ alors $3x = 3$ alors $[3x] = 3$

(d) i définie sur $[-4;4]$ par $i(x) = [\dfrac{x}{2}]$

— si $-4 \leq x < -2$ alors $-2 \leq \dfrac{x}{2} < -1$ donc $[\dfrac{x}{2}] = -2$
— si $-2 \leq x < 0$ alors $-1 \leq \dfrac{x}{2} < 0$ donc $[\dfrac{x}{2}] = -1$
— si $0 \leq x < 2$ alors $0 \leq \dfrac{x}{2} < 1$ donc $[\dfrac{x}{2}] = 0$
— si $2 \leq x < 4$ alors $1 \leq \dfrac{x}{2} < 2$ donc $[\dfrac{x}{2}] = 1$

— si $x=4$ alors $\dfrac{x}{2}=2$ donc $[\dfrac{x}{2}]=2$

(e) j définie sur $[-6;6]$ par $j(x)=[\dfrac{x}{3}]$

— si $-6\leq x<-3$ alors $-2\leq\dfrac{x}{3}<-1$ donc $[\dfrac{x}{3}]=-2$

— si $-3\leq x<0$ alors $-1\leq\dfrac{x}{3}<0$ donc $[\dfrac{x}{3}]=-1$

— si $0\leq x<3$ alors $0\leq\dfrac{x}{3}<1$ donc $[\dfrac{x}{3}]=0$

— si $3\leq x<6$ alors $1\leq\dfrac{x}{2}<2$ donc $[\dfrac{x}{3}]=1$

— si $x=6$ alors $\dfrac{x}{3}=2$ donc $[\dfrac{x}{2}]=2$

(f) k définie sur $[-2;2]$ par $k(x)=[x^2]$
L'ensemble de définition D_f est centré en 0 et $\forall x\in D_f\ f(-x)=f(x)$ donc f est paire donc on étudie f sur $[0;2]$ et on complète la courbe en utilisant la symétrie orthogonale d'axe l'axe des ordonnées.

— si $0\leq x<1$ alors $0\leq x^2<1$ donc $[x^2]=0$
— si $1\leq x<\sqrt{2}$ alors $1\leq x^2<2$ donc $[x^2]=1$
— si $\sqrt{2}\leq x<\sqrt{3}$ alors $2\leq x^2<3$ donc $[x^2]=2$
— si $\sqrt{3}\leq x<2$ alors $3\leq x^2<4$ donc $[x^2]=3$
— si $x=2$ alors $x^2=4$ donc $[x^2]=4$

(g) l définie sur $[0;9]$ par $l(x)=[\sqrt{x}]$

— si $0\leq x<1$ alors $0\leq\sqrt{x}<1$ donc $[\sqrt{x}]=0$
— si $1\leq x<4$ alors $1\leq\sqrt{x}<2$ donc $[\sqrt{x}]=1$
— si $4\leq x<9$ alors $2\leq\sqrt{x}<3$ donc $[\sqrt{x}]=2$
— si $x=9$ alors $\sqrt{x}=3$ donc $[\sqrt{x}]=3$

7. On voudrait déterminer puis dessiner avec précision dans un repère orthonormé l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y)$ tels que $[x]^2+[y]^2=0$
On sait que la somme de 2 réels de même signe est nulle si et seulement si chacun de ces réels est nul.
Donc $[x]^2+[y]^2=0\Leftrightarrow[x]^2=[y]^2=0\Leftrightarrow[x]=0$ et $[y]=0$
$\Leftrightarrow 0\leq x<1$ et $0\leq y<1$

8. (a) — si $x=0$ alors $\dfrac{1}{x^2+1}=1$ donc $\delta(x)=[\dfrac{1}{x^2+1}]=1$

— si $x\neq0$ alors $x^2>0$ donc $x^2+1>1$ donc $0<\dfrac{1}{x^2+1}<1$ donc $\delta(x)=[\dfrac{1}{x^2+1}]=0$

(b) — si $x=0$ alors $\dfrac{x}{x^2+1}=0$ donc $\omega(x)=[\dfrac{x}{x^2+1}]=0$

— si $x>0$ alors $x^2-x+1>0$ car $\Delta=-3<0$ donc $x^2+1>x$ donc $0<\dfrac{x}{x^2+1}<1$ donc $\omega(x)=[\dfrac{x}{x^2+1}]=0$

— si $x<0$ alors $x^2+x+1>0$ car $\Delta=-3<0$ donc $x^2+1>-x$ donc $0<\dfrac{-x}{x^2+1}<1$ donc $0>\dfrac{x}{x^2+1}>-1$ donc $\omega(x)=[\dfrac{x}{x^2+1}]=-1$

(c) — si $x=0$ alors $s(x)=\omega(0)-\omega(0)=0$

— si $x > 0$ alors $s(x) = \omega(x) - \omega(-x) = 0 - (-1) = 1$
— si $x < 0$ alors $s(x) = \omega(x) - \omega(-x) = -1 - 0 = -1$
donc $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $xs(x) = |x|$ car
— si $x = 0$ alors $xs(x) = 0$
— si $x > 0$ alors $xs(x) = 1x = x$
— si $x < 0$ alors $s(x) = -1x = -x$