

Ensembles

Christian CYRILLE

"Il n'y a pas de mathématiques modernes. Ces deux mots anodins font pourtant régner la terreur dans des millions de foyers où les parents, angoissés, "sèchent" sur des problèmes donnés à leurs fils en quatrième. "

Jean Rostand

1 Définition d'un ensemble

Un ensemble peut être déterminé :

- soit en extension lorsque le nombre de ses éléments n'est pas très élevé. On définit l'ensemble en donnant la liste de ses éléments.
ex : l'ensemble des résultats du jet d'un dé est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- soit en compréhension par une propriété caractéristique.
ex : l'ensemble des entiers pairs

On appelle ensemble vide qu'on note \emptyset un ensemble qui n'a aucun élément

2 Appartenance

Lorsqu'un objet x appartient à un ensemble E , on écrit $x \in E$.

Dans le cas contraire on écrit $x \notin E$.

3 Parties ou sous-ensembles d'un ensemble E

3.1 Définition

On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble E ou que A est une partie de E ou que A est un sous-ensemble de E lorsque l'implication : $\forall x \ x \in A \Rightarrow x \in E$ est vraie.

On écrit alors $A \subseteq E$.

Lorsque A est strictement inclus dans E , on écrit $A \subset E$

Un ensemble A n'est pas inclus dans un ensemble E lorsque : $\exists x \ x \in A$ et $x \notin E$.

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E .

3.2 Exemples

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

\mathbb{N} = l'ensemble des entiers naturels = $\{0; 1; 2; 3; \dots\}$

\mathbb{Z} = l'ensemble des entiers relatifs = $\{\dots; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

\mathbb{D} = l'ensemble des nombres décimaux = l'ensemble des nombres avec un nombre fini de chiffres après la virgule = l'ensemble des nombres qui ont la forme suivante :

entier relatif

puissance positive de 10

\mathbb{Q} = l'ensemble des nombres rationnels = l'ensemble des nombres qui ont la forme suivante : $\frac{\text{entier relatif}}{\text{entier relatif non nul}}$

\mathbb{R} = l'ensemble des nombres réels = $] -\infty; +\infty[$

\mathbb{C} = l'ensemble des nombres complexes = $\{x + iy / x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ = l'ensemble des nombres irrationnels.

$\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{6}; \sqrt{7}; \sqrt{2} + \sqrt{3}; \sqrt{3} - \sqrt{2}; \sqrt{15}; \ln\left(\frac{3}{2}\right); \sqrt[3]{2}; \pi^2; \sin(10^\circ); \sin(20^\circ); \cos(5^\circ); \tan(25^\circ)$ sont des irrationnels.

3.3 Exercice : $\sqrt{2} \notin \mathbb{D}$

Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal.

Raisonnons par l'absurde. supposons que $\sqrt{2}$ est un décimal donc il a un développement décimal fini. Soit x le dernier chiffre de ce développement décimal. On sait que $\sqrt{2}^2 = 2$ donc

- ou $x = 1$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 1 donc il est impossible d'obtenir 2
- ou $x = 2$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 4 donc il est impossible d'obtenir 2
- ou $x = 3$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 9 donc il est impossible d'obtenir 2
- ou $x = 4$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 6 donc il est impossible d'obtenir 2
- ou $x = 5$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 5 donc il est impossible d'obtenir 2
- ou $x = 6$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 6 donc il est impossible d'obtenir 2
- ou $x = 7$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 9 donc il est impossible d'obtenir 2
- ou $x = 8$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 4 donc il est impossible d'obtenir 2
- ou $x = 9$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 1 donc il est impossible d'obtenir 2

Par conséquent, on aboutit à une contradiction donc $\sqrt{2}$ ne peut être un nombre décimal.

3.4 Exercice : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

1. Démontrer que si un entier n est pair alors son carré n^2 est pair
2. Démontrer que si un entier n est impair alors son carré n^2 est impair
3. Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel (c'est-à-dire ne peut se mettre sous la forme $\frac{p}{q}$ où p est un entier relatif et q un entier relatif non nul).

3.4.1 Corrigé

1. soit un entier n pair alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ donc son carré $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k'$ où $k' = 2k^2$ est un entier naturel donc n^2 est pair
2. soit un entier n impair alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$ donc son carré $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$ où $k' = 2k^2 + 2k$ est un entier naturel donc n^2 est impair

3. Supposons que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ irréductible avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ donc $2 = \frac{p^2}{q^2}$.

Par conséquent $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair donc p est pair d'où $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$.
Comme $p^2 = 2q^2$ alors $(2k)^2 = 2q^2$. On en déduit que $q^2 = 2k^2$ donc q^2 est pair d'où $\exists k' \in \mathbb{N}$ tel que $q = 2k'$

Mais alors la fraction $\frac{p}{q} = \frac{2k}{2k'} = \frac{k}{k'}$ est réductible. Contradiction. Donc l'hypothèse

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est fausse.

L'ensemble des entiers naturels pairs (ou l'ensemble des multiples de 2) est $\{x = 2k/k \in \mathbb{N}\}$ est inclus strictement dans \mathbb{N}

L'ensemble des entiers naturels impairs est $\{x = 2k + 1/k \in \mathbb{N}\}$ est inclus strictement dans \mathbb{N}

3.5 Propriétés

1. Pour tout ensemble E , on a $\emptyset \subset E$.
 \emptyset s'appelle la partie vide de E .
2. Pour tout ensemble E , on a $E \subseteq E$.
 E s'appelle la partie pleine de E .
3. Quelques exemples :
 - si $E = \{a\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}\}$
 - si $E = \{a; b\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a, b\}\}$
 - si $E = \{a; b; c\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a, b\}; \{a, c\}; \{b, c\}; \{a, b, c\}\}$
 - si $E = \emptyset$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$
4. si E est un ensemble fini ayant n éléments alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de ses parties a 2^n éléments

Démonstration : Pour créer l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E ,

- on place d'abord la seule partie à 0 éléments qui est l'ensemble vide \emptyset
- puis les parties à 1 élément qu'on appelle les singletons,
- les parties à 2 éléments qu'on appelle les paires,
- celles à 3 éléments,
- ...
- celles à $n - 1$ éléments
- et enfin la seule partie à n éléments, la partie pleine c'est-à-dire l'ensemble E lui-même.

Par conséquent,

- si $E_1 = \{a\}$ alors $\mathcal{P}(E_1) = \{\emptyset; \{a\}\}$
- si $E_2 = \{a; b\}$ alors $E_2 = E_1 \cup \{b\}$ et $\mathcal{P}(E_2) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\}$
- si $E_3 = \{a; b; c\}$ alors $E_3 = E_2 \cup \{c\}$ et $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; \{a; b; c\}\}$



On peut donc remarquer que lorsque l'on ajoute un élément rouge à un ensemble E_i , alors l'ensemble des parties du nouvel ensemble $E_i \cup \{x\}$ est formé de toutes les anciennes parties de E_i auxquelles on ajoute de nouvelles parties qui sont en fait formées des anciennes parties auxquelles on ajoute le nouveau élément rouge $\{x\}$.

Donc il y a autant de nouvelles parties ayant ce nouvel élément rouge x que d'anciennes parties n'ayant pas x .

On pose $pr(n)$: " le nombre de parties d'un ensemble ayant n éléments est 2^n "

- Étape 1 : initialisation
A-t-on $pr(0)$?
c'est-à-dire a-t-on le nombre de parties d'un ensemble ayant 0 éléments est 2^0 ?
Oui car si $Card(E) = 0$ c'est que $E = \emptyset$ donc $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. $\mathcal{P}(E)$ n'a donc qu'un seul élément.
Par conséquent $pr(0)$ est vraie.
- Étape 2 : hérédité
Soit un certain entier $k \geq 0$. A-t-on $pr(k) \implies pr(k+1)$?
c'est-à-dire a-t-on le nombre de parties d'un ensemble ayant k éléments est $2^k \implies$ que le nombre de parties d'un ensemble ayant $k+1$ éléments est 2^{k+1}
Supposons que l'hypothèse de récurrence suivante " le nombre de parties d'un ensemble ayant k éléments est 2^k " soit vraie.

Soit un ensemble F ayant $k + 1$ éléments. Isolons un élément x de F . Par conséquent $F = E \cup \{x\}$ où E a k éléments.

Alors l'ensemble des parties du nouvel ensemble $F = E \cup \{x\}$ est formé de toutes les anciennes parties de E auxquelles on ajoute de nouvelles parties qui sont en fait formées des anciennes parties auxquelles on ajoute le nouveau élément rouge $\{x\}$.

Or d'après l'hypothèse de récurrence, $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^k$ et de plus il y a autant de nouvelles parties ayant ce nouvel élément rouge que d'anciennes parties n'ayant pas $\{x\}$

donc $Card(\mathcal{P}(F)) = 2^k + 2^k = 2(2^k) = 2^{1+k}$ CQFD.

- Conclusion pr est initialisé en 0 et pr est héréditaire

donc pour tout entier naturel n , si $Card(E) = n$ alors $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

5. On appelle $\binom{n}{p}$ le nombre de parties à p éléments d'un ensemble E ayant n éléments.

Ceci se notait auparavant C_n^p . On parle aussi du nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n .

6. (a) Si $p > n$ alors $\binom{n}{p} = 0$

normal car on peut pas former de parties ayant plus d'éléments que l'ensemble E .

(b) Pour tout entier naturel n , $\binom{n}{0} = 1$

car il n'y a qu'une seule partie ayant 0 élément dans l'ensemble E : c'est la partie vide \emptyset

(c) Pour tout entier naturel n , $\binom{n}{n} = 1$

car il n'y a qu'une seule partie ayant n éléments dans l'ensemble E : c'est la partie pleine E

(d) Pour tout entier naturel n , $\binom{n}{1} = n$

car il n'y a que n parties ayant un seul élément dans un ensemble E : ce sont les singletons de chacun des éléments de E .

(e) Pour tout p compris entre 0 et n , $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

car choisir p éléments dans un ensemble E est équivalent à choisir $n - p$ éléments dans cet ensemble.

(f) Pour tout p compris entre 0 et n $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

Cette formule s'appelle la Grande Formule de PASCAL.

Démonstration : On isole un élément x de E .

$\binom{n}{p}$ est le nombre total de parties à p éléments = nombre de parties à p éléments

contenant x plus le nombre de parties à p éléments ne contenant pas $x = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

(g) Formule du binôme de Newton :

Pour tous réels a et b l'on a

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (b + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

(h) d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad (1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$

(i) Pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ en posant $x = 1$

(j) Pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ en posant $x = -1$

$(a+b)^0$	1						1
$(a+b)^1$	1	1					$a+b$
$(a+b)^2$	1	2	1				$a^2+2ab+b^2$
$(a+b)^3$	1	3	3	1			$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a+b)^4$	1	4	6	4	1		$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
$(a+b)^5$	1	5	10	10	5	1	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

Triangle dit de PASCAL (en fait retrouvé chez dans les manuscrits Miroir de Jade des 4 inconnues du chinois SHOU-CHI-YIE en 1303 et dans les travaux chez de l'indien BASKHARA 1114-1185)

On peut remarquer que :

- Dans la colonne correspondant à $p = 1$ on retrouve les entiers naturels
- Dans la colonne correspondant à $p = 2$ on retrouve les nombres triangulaires $T_n = \sum_{k=1}^n k$
 - $T_1 = 1$
 - $T_2 = 1 + 2 = 3$
 - $T_3 = 1 + 2 + 3 = 6$
 - $T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
 - $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
- La somme des éléments de chaque ligne est 2^n .
Par exemple, pour $n = 4$ on a $S = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$
- Si on additionne les termes de chaque ligne affectés alternativement des signes $+$ et $-$ on obtient comme somme : 0
Par exemple, pour $n = 5$ on a $S = 1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 = 0$

Démonstration par récurrence de la Formule du binôme de Newton (1642-1727)

Soient a et b des nombres réels donc $ab = ba$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} (a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Or $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N} (a + b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

en effectuant le changement d'indice $j = n - i$

Démonstration :

Notons $pr(n) : (a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$.

1. Initialisation : elle est vraie en $n = 0$ car :

$$(a + b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^{0-0}$$

2. Hérédité : Supposons que la propriété est vraie pour un entier fixé $k \geq 0$ c'est-à-dire que :

$$(a + b)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^i b^{k-i}$$

$$\text{Alors } (a + b)^{k+1} = (a + b)(a + b)^k = (a + b) \left[\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^i b^{k-i} \right]$$

$$= (a + b) \left(\binom{k}{0} a^0 b^k + \binom{k}{1} a^1 b^{k-1} + \dots + \binom{k}{i} a^i b^{k-i} + \dots + \binom{k}{k-1} a^{k-1} b^1 + \binom{k}{k} a^k b^0 \right)$$

$$= (a + b) \left(b^k + \binom{k}{1} a^1 b^{k-1} + \dots + \binom{k}{i} a^i b^{k-i} + \dots + \binom{k}{k-1} a^{k-1} b^1 + a^k \right)$$

$$= (ab^k + \binom{k}{1} a^2 b^{k-1} + \dots + \binom{k}{i} a^{i+1} b^{k-i} + \dots + \binom{k}{k-1} a^k b^1 + a^{k+1})$$

$$+ b^{k+1} + \binom{k}{1} a^1 b^k + \dots + \binom{k}{i} a^i b^{k-i+1} + \dots + \binom{k}{k-1} a^{k-1} b^2 + a^k b)$$

$$= b^{k+1} + ab^k \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0} \right] + a^2 b^{k-1} \left[\binom{k}{2} + \binom{k}{1} \right] + \dots + a^i b^{k-i+1} \left[\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} \right] +$$

$$a^{i+1} b^{k-i} \left[\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1} \right] + \dots + a^k b^1 \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} \right] + a^{k+1}$$

$$= b^{k+1} + ab^k \binom{k+1}{1} + a^2 b^{k-1} \binom{k+1}{2} + \dots + a^i b^{k-i+1} \binom{k+1}{i} + a^{i+1} b^{k-i} \binom{k+1}{i+1} +$$

$$\dots + a^k b^1 \binom{k+1}{k} + a^{k+1}$$

$$= \binom{k+1}{0} a^0 b^{k+1} + ab^k \binom{k+1}{1} + a^2 b^{k-1} \binom{k+1}{2} + \dots + a^i b^{k-i+1} \binom{k+1}{i} + a^{i+1} b^{k-i} \binom{k+1}{i+1} +$$

$$\dots + a^k b^1 \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} a^{k+1} b^0$$

3. Conclusion : pr étant initialisée en 0 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$



Cette formule est valable pour tous éléments a et b d'un anneau à condition que ces éléments soient commutables c'est-à-dire que $ab = ba$.

C'est le cas pour des matrices carrées d'ordre n : A et B à condition d'avoir vérifié que $AB = BA$.

Souvent $A = I$ la matrice de l'identité donc $IB = B$ et $BI = B$ donc $IB = BI$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N} (I + B)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} I^{n-j} B^j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} I B^j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B^j$$

Exemple :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une écriture simplifiée de A^n pour tout entier naturel n .

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $A = I + J$
- $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice J est dite **nilpotente**.

On peut alors démontrer par récurrence que $\forall n \geq 2 \quad J^n = O$.

En effet,

— $J^2 = O$ la propriété est vraie au rang $n = 2$

— Soit un entier $k \geq 2$ supposons que $J^k = O$ alors $J^{k+1} = J J^k = J O = O$

— La propriété étant initialisée en 2 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier $n \geq 2$

- Alors comme I et J sont commutables puisque $IJ = JI$ car $IJ = J$ et $JI = J$ on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = (I + J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I^{n-k} J^k$$

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I J^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k$$

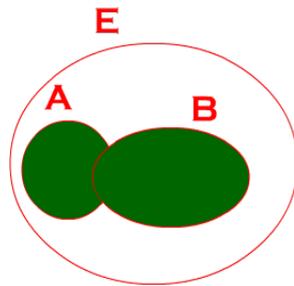
Or à partir de $k = 2$ on a $J^k = O$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} J^k = \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 = I + nJ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Opérations sur des ensembles

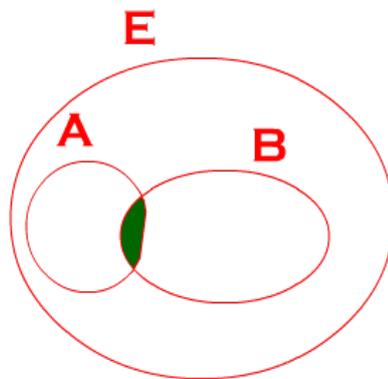
4.1 Union

Si A et B sont des parties de E alors la réunion de A et de B qu'on note $A \cup B$ est la partie de E formée des éléments de A et des éléments de B
Plus formellement $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$



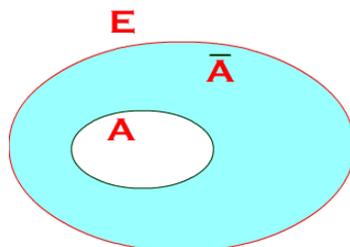
4.2 Intersection

Si A et B sont des parties de E alors l'intersection de A et de B qu'on note $A \cap B$ est la partie de E formée des éléments de A qui sont aussi des éléments de B
Plus formellement $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$



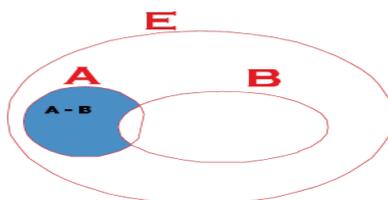
4.3 Complémentaire

Si A est une partie de E , alors on appelle complémentaire de A dans E , la partie formée des éléments de E qui n'appartiennent pas à A . On note cette partie \bar{A} ou $C_E A$



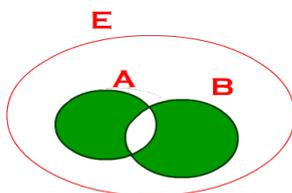
4.4 Différence

Si A et B sont des parties de E alors on appelle différence de A et B qu'on note $A - B$ ou $A \setminus B$ l'ensemble formé par les éléments de A n'appartenant pas à B



4.5 Différence symétrique

Si A et B sont des parties de E alors on appelle différence symétrique de A et B qu'on note $A \Delta B$ l'ensemble formé par les éléments appartenant à un et un seul des ensembles A et B . En fait, $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



4.6 Propriétés les plus importantes

Soit un ensemble E . Soient A et B des sous ensembles (ou des parties) de E . Alors :

1. $A \cup \emptyset = A$; $A \cup A = A$; $A \cup E = E$; $A \subseteq A \cup B$; $A \cup B = B \cup A$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap A = A$; $A \cap E = A$; $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B = B \cap A$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{A} \cap A = \emptyset$; $\overline{A} \cup A = E$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

5 Produit cartésien de deux ensembles

On appelle produit cartésien de deux ensembles E et F qu'on note $E \times F$, l'ensemble suivant :
 $E \times F = \{(x; y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$.

C'est l'ensemble des couples où le premier élément appartient à E et le deuxième élément appartient à F .

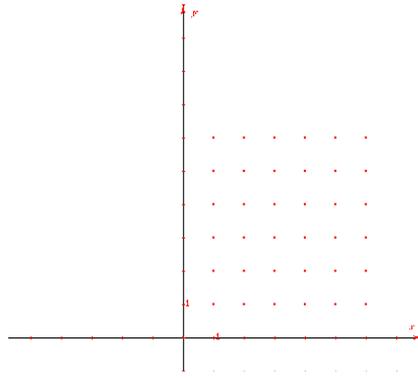
- Lorsque $E = F$, $E \times E$ se note E^2
- Le produit cartésien des ensembles E , F et G est :
 $E \times F \times G = \{(x; y; z) / x \in E, y \in F \text{ et } z \in G\}$
C'est l'ensemble des triplets où le premier élément appartient à E , le deuxième élément appartient à F et le troisième élément appartient à G
- On peut généraliser le produit cartésien à n ensembles :
 $E_1 \times E_2 \times E_3 \times \dots \times E_n$
- $E \times E \times E \times \dots \times E$ (n fois) se note E^n

5.1 Exemples

- $\{(x; y) / x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$ se note \mathbb{R}^2
- Lorsque l'on jette 2 dés, l'ensemble des résultats possibles est l'univers
 $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \times \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ qu'on note encore $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}^2$
 Ω est formé des 36 couples $(1; 1); (1; 2); \dots; (6; 5); (6; 6)$ que l'on peut représenter par le tableau à 2 entrées ci-dessous :

de1	de2	1	2	3	4	5	6
1		(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2		(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3		(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4		(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5		(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6		(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ou par le dessin suivant



6 Exercices

6.1

On considère les sous-ensembles de \mathbb{N} suivants :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, B = \{1, 3, 5, 7\}, C = \{2, 4, 6\}, D = \{3, 6\}$$

1. Déterminer $B \cap D, C \cap D$
2. Déterminer $B \cup C, C \cup D$. Une de ces réunions est-elle disjointe ?
3. Déterminer $C \Delta D$.
4. Déterminer les complémentaires dans A de B, C et D .

6.2

On considère les ensembles suivants :

$$A = \{1, 2, 5\}; B = \{\{1, 2\}, 5\}; C = \{\{1, 2, 5\}\}; D = \{0, 1, 2, 5\}; E = \{5, 1, 2\}$$

$$F = \{\{1, 2\}, \{5\}\}; G = \{\{1, 2\}, \{5\}, 5\} \text{ et } H = \{5, \{1\}, \{2\}\}$$

1. Donner le nombre d'éléments de chacun de ces ensembles.
2. Quelles sont les relations d'égalité ou d'inclusion existant entre ces ensembles ?
3. Déterminer $A \cap B, G \cup D, E/G$

6.3

On suppose que A et B sont des sous-ensembles d'un même ensemble E .

Simplifier les expressions suivantes :

1. $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$
2. $B \cup (A - B)$

6.4

Les notations $\emptyset, \{\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$ désignent-elles le même ensemble ?

6.5 Rationnels à racines carrées irrationnelles

Soient a, b, c, d quatre nombres rationnels tels que $d \geq 0; b \geq 0; \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$
Démontrer que $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d} \implies (a = c) \text{ et } (b = d)$

6.5.1 Corrigé

6.6 Partie entière d'un nombre réel

On admet que tout réel x est compris entre 2 entiers relatifs consécutifs n et $n + 1$ c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R} \exists$ un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$.

Cet entier n qui est le **plus grand entier relatif précédant x** s'appelle la **partie entière de x** .

On le note $Ent(x)$ ou $[x]$ en Mathématiques. On a donc

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

1. Tracer avec précision dans un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ la courbe représentative de la fonction partie entière de \mathbb{R} dans \mathbb{Z} qui, à tout réel x associe $[x]$. Pour le graphique, on prendra $x \in [-4; 4]$
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{Z} [x + k] = [x] + k$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$ encadrer le nombre $x - [x]$
4. Démontrer que l'application $epi : \mathbb{R} \mapsto [0; 1[$ qui à tout réel x associe $epi(x) = x - [x]$ est périodique. Quelle est sa période ? Dessiner la courbe représentative de epi dans un autre repère pour $x \in [-4; 4]$
5. Exprimer $[-x]$ en fonction de $[x]$. Justifier.
6. Dessiner avec précision les courbes des fonctions suivantes dans des repères différents :
 - (a) f définie sur $[-4; 4]$ par $f(x) = [|x|]$
 - (b) g définie sur $[-2; 2]$ par $g(x) = [2x]$
 - (c) h définie sur $[-1; 1]$ par $h(x) = [3x]$
 - (d) i définie sur $[-4; 4]$ par $i(x) = [\frac{x}{2}]$
 - (e) j définie sur $[-6; 6]$ par $j(x) = [\frac{x}{3}]$
 - (f) k définie sur $[-2; 2]$ par $k(x) = [x^2]$
 - (g) l définie sur $[0; 9]$ par $l(x) = [\sqrt{x}]$

Pour chaque graphique, une justification est demandée. Attention aux bornes des intervalles.
7. Déterminer puis dessiner avec précision dans un repère orthonormé l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ tels que $[x]^2 + [y]^2 = 0$
8. Soient les fonctions :

$$\delta : x \mapsto [\frac{1}{x^2 + 1}]; \omega : x \mapsto [\frac{x}{x^2 + 1}] \text{ et } s : x \mapsto \omega(x) - \omega(-x)$$
 - (a) Déterminer $\delta(x)$, $\omega(x)$ et $s(x)$ en fonction de x . Dessiner leurs courbes.
 - (b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$ l'on a : $x([\frac{x}{x^2 + 1}] - [\frac{-x}{x^2 + 1}]) = |x|$
9. Démontrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad [x + y] = [x] + [y] + \varepsilon$ où $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$
10. Démontrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad [x - y] = [x] - [y] + \varepsilon$ où $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = -1$
11. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad [x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + \dots + [x + \frac{n-1}{n}] = [nx]$
12. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad [\frac{[nx]}{n}] = [x]$

6.6.1 Corrigé

On admet que tout réel x est compris entre 2 entiers relatifs consécutifs n et $n + 1$ c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R} \exists$ un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$. Cet entier n qui est le plus grand entier relatif précédant x s'appelle la partie entière de x . On le note $Ent(x)$ ou $[x]$ en Mathématiques. On a donc $[x] \leq x < [x] + 1$

1.
 - si $-4 \leq x < -3$ alors $[x] = -4$
 - si $-3 \leq x < -2$ alors $[x] = -3$
 - si $-2 \leq x < -1$ alors $[x] = -2$
 - si $-1 \leq x < 0$ alors $[x] = -1$
 - si $0 \leq x < 1$ alors $[x] = 0$
 - si $1 \leq x < 2$ alors $[x] = 1$
 - si $2 \leq x < 3$ alors $[x] = 2$
 - si $3 \leq x < 4$ alors $[x] = 3$
 - si $x = 4$ alors $[x] = 4$

Voici donc dans un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ la courbe représentative de la fonction partie entière de \mathbb{R} dans \mathbb{Z} qui, à tout réel x associe $[x]$. Pour le graphique, on prendra $x \in [-4; 4]$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$ alors $[x] \leq x < [x] + 1$ donc $\forall k \in \mathbb{Z} [x] + k \leq x + k < [x] + 1 + k$. Or $[x] + k$ et $[x] + k + 1$ sont deux entiers consécutifs donc $[x + k] = [x] + k$

3. $\forall x \in \mathbb{R}$ comme $[x] \leq x < [x] + 1$ alors $[x] - [x] \leq x - [x] < [x] + 1 - [x]$ donc $0 \leq x - [x] < 1$. Lorsque x est un réel positif alors $x - [x]$ s'appelle aussi la partie décimale de x

4. Soit $k \in \mathbb{Z}^*$ alors l'application $epi : \mathbb{R} \mapsto [0; 1[$ qui à tout réel x associe $epi(x) = x - [x]$ est périodique de période k car :

- L'ensemble de définition de epi qui est \mathbb{R} est tel que $\forall x \in D_{epi}$ on $x + k \in D_{epi}$
- $\forall x \in D_{epi} epi(x + k) = (x + k) - [x + k] = x + k - ([x] + k) = x - [x] = epi(x)$

La plus petite période k strictement positive est 1 donc "la" période de $x \mapsto [x]$ est 1.

La courbe représentative de epi ressemble à un champ d'épis dans un autre repère pour $x \in [-4; 4]$

5. Si $[x] \leq x < [x] + 1$ alors $-[x] \geq -x > -[x] - 1$ donc $-[x] - 1 < -x \leq -[x]$ Donc pour exprimer $[-x]$ en fonction de $[x]$, il faudra distinguer 2 cas :

- (a) **ou bien x est un entier relatif** alors $-x$ est l'entier $-k$ aussi donc $[-x] = [-k] = -k = -[x]$ donc $[-x] = -[x]$

- (b) **ou bien x n'est pas entier** alors $[x] < x < [x] + 1$ alors $-[x] > -x > -[x] - 1$ donc $-[x] - 1 < -x < -[x]$. Et comme $-[x] - 1$ et $-[x]$ sont des entiers consécutifs alors $[-x] = -[x] - 1$

6. Nous allons dessiner avec précision les courbes des fonctions suivantes dans des repères différents :

- (a) f définie sur $[-4; 4]$ par $f(x) = [|x|]$

L'ensemble de définition D_f est centré en 0 et $\forall x \in D_f f(-x) = f(x)$ donc f est paire donc on étudie f sur $[0; 4]$ et on complète la courbe en utilisant la symétrie orthogonale d'axe l'axe des ordonnées.

- (b) g définie sur $[-2; 2]$ par $g(x) = [2x]$

- si $-2 \leq x < \frac{-3}{2}$ alors $-4 \leq 2x < -3$ donc $[2x] = -4$
- si $\frac{-3}{2} \leq x < -1$ alors $-3 \leq 2x < -2$ donc $[2x] = -3$
- si $-1 \leq x < \frac{-1}{2}$ alors $-2 \leq 2x < -1$ donc $[2x] = -2$
- si $\frac{-1}{2} \leq x < 0$ alors $-1 \leq 2x < 0$ donc $[2x] = -1$
- si $0 \leq x < \frac{1}{2}$ alors $0 \leq 2x < 1$ donc $[2x] = 0$
- si $\frac{1}{2} \leq x < 1$ alors $1 \leq 2x < 2$ donc $[2x] = 1$
- si $1 \leq x < \frac{3}{2}$ alors $2 \leq 2x < 3$ donc $[2x] = 2$
- si $\frac{3}{2} \leq x < 2$ alors $3 \leq 2x < 4$ donc $[2x] = 3$
- si $x = 2$ alors $2x = 4$ donc $[2x] = 4$

(c) h définie sur $[-1; 1]$ par $h(x) = [3x]$

- si $-1 \leq x < \frac{-2}{3}$ alors $-3 \leq 3x < -2$ donc $[3x] = -3$
- si $\frac{-2}{3} \leq x < \frac{-1}{3}$ alors $-2 \leq 3x < -1$ donc $[3x] = -2$
- si $\frac{-1}{3} \leq x < 0$ alors $-1 \leq 3x < 0$ donc $[3x] = -1$
- si $0 \leq x < \frac{1}{3}$ alors $0 \leq 3x < 1$ donc $[3x] = 0$
- si $\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$ alors $1 \leq 3x < 2$ donc $[3x] = 1$
- si $\frac{2}{3} \leq x < 1$ alors $2 \leq 3x < 3$ donc $[3x] = 2$
- si $x = 1$ alors $3x = 3$ donc $[3x] = 3$

(d) i définie sur $[-4; 4]$ par $i(x) = [\frac{x}{2}]$

- si $-4 \leq x < -2$ alors $-2 \leq \frac{x}{2} < -1$ donc $[\frac{x}{2}] = -2$
- si $-2 \leq x < 0$ alors $-1 \leq \frac{x}{2} < 0$ donc $[\frac{x}{2}] = -1$
- si $0 \leq x < 2$ alors $0 \leq \frac{x}{2} < 1$ donc $[\frac{x}{2}] = 0$
- si $2 \leq x < 4$ alors $1 \leq \frac{x}{2} < 2$ donc $[\frac{x}{2}] = 1$
- si $x = 4$ alors $\frac{x}{2} = 2$ donc $[\frac{x}{2}] = 2$

(e) j définie sur $[-6; 6]$ par $j(x) = [\frac{x}{3}]$

- si $-6 \leq x < -3$ alors $-2 \leq \frac{x}{3} < -1$ donc $[\frac{x}{3}] = -2$
- si $-3 \leq x < 0$ alors $-1 \leq \frac{x}{3} < 0$ donc $[\frac{x}{3}] = -1$
- si $0 \leq x < 3$ alors $0 \leq \frac{x}{3} < 1$ donc $[\frac{x}{3}] = 0$
- si $3 \leq x < 6$ alors $1 \leq \frac{x}{3} < 2$ donc $[\frac{x}{3}] = 1$

- si $x = 6$ alors $\frac{x}{3} = 2$ donc $[\frac{x}{2}] = 2$
- (f) k définie sur $[-2; 2]$ par $k(x) = [x^2]$
 L'ensemble de définition D_f est centré en 0 et $\forall x \in D_f f(-x) = f(x)$ donc f est paire donc on étudie f sur $[0; 2]$ et on complète la courbe en utilisant la symétrie orthogonale d'axe l'axe des ordonnées.
- si $0 \leq x < 1$ alors $0 \leq x^2 < 1$ donc $[x^2] = 0$
 - si $1 \leq x < \sqrt{2}$ alors $1 \leq x^2 < 2$ donc $[x^2] = 1$
 - si $\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}$ alors $2 \leq x^2 < 3$ donc $[x^2] = 2$
 - si $\sqrt{3} \leq x < 2$ alors $3 \leq x^2 < 4$ donc $[x^2] = 3$
 - si $x = 2$ alors $x^2 = 4$ donc $[x^2] = 4$
- (g) l définie sur $[0; 9]$ par $l(x) = [\sqrt{x}]$
- si $0 \leq x < 1$ alors $0 \leq \sqrt{x} < 1$ donc $[\sqrt{x}] = 0$
 - si $1 \leq x < 4$ alors $1 \leq \sqrt{x} < 2$ donc $[\sqrt{x}] = 1$
 - si $4 \leq x < 9$ alors $2 \leq \sqrt{x} < 3$ donc $[\sqrt{x}] = 2$
 - si $x = 9$ alors $\sqrt{x} = 3$ donc $[\sqrt{x}] = 3$
7. On voudrait déterminer puis dessiner avec précision dans un repère orthonormé l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ tels que $[x]^2 + [y]^2 = 0$
 On sait que la somme de 2 réels de même signe est nulle si et seulement si chacun de ces réels est nul.
 Donc $[x]^2 + [y]^2 = 0 \Leftrightarrow [x]^2 = [y]^2 = 0 \Leftrightarrow [x] = 0$ et $[y] = 0$
 $\Leftrightarrow 0 \leq x < 1$ et $0 \leq y < 1$
8. (a) • si $x = 0$ alors $\frac{1}{x^2+1} = 1$ donc $\delta(x) = [\frac{1}{x^2+1}] = 1$
 • si $x \neq 0$ alors $x^2 > 0$ donc $x^2 + 1 > 1$ donc $0 < \frac{1}{x^2+1} < 1$ donc $\delta(x) = [\frac{1}{x^2+1}] = 0$
- (b) • si $x = 0$ alors $\frac{x}{x^2+1} = 0$ donc $\omega(x) = [\frac{x}{x^2+1}] = 0$
 • si $x > 0$ alors $x^2 - x + 1 > 0$ car $\Delta = -3 < 0$ donc $x^2 + 1 > x$ donc $0 < \frac{x}{x^2+1} < 1$ donc $\omega(x) = [\frac{x}{x^2+1}] = 0$
 • si $x < 0$ alors $x^2 + x + 1 > 0$ car $\Delta = -3 < 0$ donc $x^2 + 1 > -x$ donc $0 < \frac{-x}{x^2+1} < 1$ donc $0 > \frac{x}{x^2+1} > -1$ donc $\omega(x) = [\frac{x}{x^2+1}] = -1$
- (c) • si $x = 0$ alors $s(x) = \omega(0) - \omega(0) = 0$
 • si $x > 0$ alors $s(x) = \omega(x) - \omega(-x) = 0 - (-1) = 1$
 • si $x < 0$ alors $s(x) = \omega(x) - \omega(-x) = -1 - 0 = -1$
 donc $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $xs(x) = |x|$ car
- si $x = 0$ alors $xs(x) = 0$
 - si $x > 0$ alors $xs(x) = 1x = x$
 - si $x < 0$ alors $s(x) = -1x = -x$