Polynômes à une indéterminée réelle et à coefficients réels

Professeur : Christian CYRILLE

21 mai 2017

"Il s'embrouillait dans les polynômes, se disculpa le professeur de mathématiques, et quand un élève s'embrouille dans les polynômes, que peut-on faire ?" Antonio Lobo Antunes

1 Définitions

On appelle monôme d'une variable réelle x toute expression de la forme $a_k x^k$ où a_k est un réel et k un entier naturel. a_k s'appelle le coefficient du monôme.
On appelle polynôme d'une variable réelle toute somme de monômes c'est-à-dire toute expression de la forme :
$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$
On appelle fonction polynômiale toute fonction $P : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
qui à $x \mapsto P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$
Un polynôme est nul lorsque tous ses coefficients respectifs sont nuls .
Le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$ s'appelle le degré du polynôme $P(x)$
Ce coefficient a_n s'appelle le coefficient dominant de $P(x)$.
Si $a_n = 1$ alors le polynôme $P(x)$ est dit unitaire.

1. Les polynômes de degré 2 sont les trinômes $ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$
2. Les polynômes de degré 1 sont les binômes $ax + b$ où où $a \neq 0$
3. Les polynômes de degré 0 sont les constantes non nulles
4. Par convention, le polynôme nul noté (0) qui est le polynôme ayant tous ses coefficients nuls est un polynôme de degré $-\infty$
   $(0) = 0x^0 + 0x^1 + 0x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. + 0x^{n-2} + 0x^{n-1} + 0x^n$

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et à une indéterminée réelle x On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et à une indéterminée réelle x dont le degré est inférieur ou égal à n. Cet ensemble contient (0) car $-\infty < n$

2 Egalité , somme , produit de 2 polynômes, multiplication d'un polynôme par un réel

1. 2 polynômes sont égaux lorsque leurs coefficients respectifs sont égaux
2. On appelle somme de deux polynômes $P(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i$ et $Q(x) = \sum_{j=0}^{q} b_j x^j$ le polynôme suivant :
   $$P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{max(p,q)} (a_k + b_k) x^k$$
3. On appelle produit de deux polynômes $P(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i$ et $Q(x) = \sum_{j=0}^{q} b_j x^j$ le polynôme suivant :
   $$P(x)Q(x) = \sum_{k=0}^{p+q} c_k x^k \text{ où } c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$
4. On appelle multiplication d'un polynôme $P(x)$ par un réel λ le polynôme suivant $\lambda P(x) = \sum_{i=0}^{p} (\lambda a_i) x^i$

3 Propriétés

1. $d^\circ(P(x)+Q(x)) \leq max(d^\circ(P(x)), d^\circ(Q(x)))$
2. si $d^\circ(P(x)) \neq d^\circ(Q(x))$ alors $d^\circ(P(x)+Q(x)) = max(d^\circ(P(x)), d^\circ(Q(x)))$
3. $P(x)Q(x) = (0) \Leftrightarrow P(x) = (0)\ ou\ Q(x) = (0)$
4. $d^\circ(P(x)Q(x)) = d^\circ(P(x)) + d^\circ(Q(x))$
5. si $R(x)$ n'est pas le polynôme nul alors :
   $R(x)P(x) = R(x)Q(x) \Rightarrow P(x) = Q(x)$

4 Division euclidienne de polynômes

4.1 Théorème

Soient un polynôme $A(x)$ et soit un polynôme $B(x)$ non nul.
Alors il existe un couple unique de polynômes $(Q(x), R(x))$ tels que

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \text{ où } R(x) = (0) \text{ ou } d^\circ R(x) < d^\circ B(x)$$

Déterminer ce couple $(Q(x), R(x))$ c'est réaliser la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$.
$Q(x)$ s'appelle le quotient de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$.
$R(x)$ s'appelle le reste de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$
Lorsque $R(x) = 0$ on dit alors que $A(x)$ est divisible par $B(x)$

4.1.1 démonstration

1. Unicité : Supposons que
   $A(x) = B(x)Q_1(x) + R_1(x)$ avec $R_1(x) = (0)$ ou $d^\circ R_1(x) < d^\circ B(x)$
   et que $A(x) = B(x)Q_2(x) + R_2(x)$ avec $R_2(x) = (0)$ ou $d^\circ R_2(x) < d^\circ B(x)$.
   Donc $B(x)Q_1(x) + R_1(x) = B(x)Q_2(x) + R_2(x)$
   Alors $B(x)(Q_1(x) - Q_2(x)) = R_2(x) - R_1(x)$
   donc $d^\circ(R_2(x) - R_1(x)) = d^\circ(B(x)) + d^\circ(Q_1(x) - Q_2(x))$
   Or $d^\circ(R_2(x) - R_1(x)) \leq max(d^\circ(R_2(x)), d^\circ(R_1(x))) < d^\circ(B(x))$
   donc $d^\circ(Q_1(x) - Q_2(x)) < 0$ donc $(Q_1(x) - Q_2(x)) = 0$
   donc $R_2(x) - R_1(x) = B(x)(Q_1(x) - Q_2(x)) = B(x)0 = 0$
   En conclusion, $Q_1(x) = Q_2(x)$ et $R_1(x) = R_2(x)$
2. Existence :
   — $1er$ cas $A(x) = 0$
     alors $A(x) = 0 = B(x)0 + 0$
   — 2ème cas $A(x) \neq 0$
     On raisonne par récurrence forte sur le degré n de $A(x)$
     — lorsque $n = 0$ alors $A(x) = C$ constante . Comme $B(x) \neq 0$
       ou bien $d^\circ(B(x) = 0$ donc $B(x) = K$ constante non nulle alors
       $A(x) = K\dfrac{C}{K} + 0$. On a donc ici $B(x) = K$; $Q(x) = \dfrac{C}{K}$ et $R(x) = 0$
       ou bien $d^\circ(B(x)) > 0$ donc $d^\circ(B(x) > d^\circ(A(x)$ et $A(x) = B(x)0 + A(x)$
     — Soit k un entier naturel. Supposons que le résultat est vrai pour tout polynôme de degré $\leq k$.
       Soit un polynôme $A(x)$ de $d^\circ = k+1$ alors considérons les termes dominants de $A(x) = a_{k+1}x^{k+1} + \cdots$ et de $B(x) = b_p x^p + \cdots$
       Alors de deux choses l'une :
       ou bien $d^\circ A(x) = k+1 < p = d^\circ B(x)$ dans ce cas $A(x) = B(x)0 + A(x)$ ici $Q(x) = 0$ et $R(x) = A(x)$
       ou bien $d^\circ A(x) = k+1 \geq p = d^\circ(B(x)$ alors on pose
       $W(x) = A(x) - \dfrac{a_{k+1}}{b_p}x^{k+1-p}B(x)$
       $= a_{k+1}x^{k+1} + \cdots - (\dfrac{a_{k+1}}{b_p}b_p x^{k+1-p+p} + \cdots).$
       $= a_{k+1}x^{k+1} + \cdots - (a_{k+1}x^{k+1} + \cdots).$
       Dans $W(x)$ il n'y a plus de terme en x^{k+1} donc $d^\circ(W(x) \leq k$ donc l'hypothèse de récurrence s'applique . Ainsi $W(x) = B(x)Q_1(x) + R_1(x)$ avec $R_1(x) = 0$ ou $d^\circ R_1(x) < d^\circ B(x)$.

Par conséquent $A(x) = W(x) + \dfrac{a_{k+1}}{b_p} x^{k+1-p} B(x)$
$= B(x)Q_1(x) + R_1(x) + \dfrac{a_{k+1}}{b_p} x^{k+1-p} B(x)$
$= B(x)(Q_1(x) + \dfrac{a_{k+1}}{b_p} x^{k+1-p}) + R_1(x) = B(x)Q(x) + R(x)$ avec $Q(x) = Q_1(x) + \dfrac{a_{k+1}}{b_p} x^{k+1-p}$ et $R(x) = R_1(x)$

— En conclusion, d'après les 2 étapes précédentes, la récurrence est vraie por tout entier naturel n

4.2 Détermination pratique de $Q(x)$ lorsque $P(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$

4.2.1 1ère Méthode : la division euclidienne selon les puissances décroissantes

Exemple : Pour $A(x) = 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 4$ et $B(x) = x - 2$

$$
\begin{array}{l|l}
3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 4 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-3x^4 + 6x^3 & 3x^3 + x^2 + 8x + 14 \\ \cline{1-1}
\qquad x^3 + 6x^2 & \\
\qquad -x^3 + 2x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 8x^2 - 2x & \\
\qquad\qquad -8x^2 + 16x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 14x + 4 & \\
\qquad\qquad\qquad -14x + 28 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad 32 &
\end{array}
$$

On a donc $3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 4 = (x - 2)(3x^3 + x^2 + 8x + 14) + 32$

1. **Propriété :**

> Si $P(x)$ est un polynôme alors le reste $R(x)$ de la division euclidienne de $P(x)$ par le polynôme $x - a$ est $P(a)$

2. **Démonstration :**
   On sait que d'après le théorème de la division euclidienne :
   $P(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$
   De deux choses l'une :
   - Ou bien $R = (0)$ donc $P(x) = (x - a)Q(x)$ donc $P(a) = 0$ donc pour tout x réel, $R(x) = 0 = P(a)$. CQFD
   - Ou bien $R \neq (0)$ donc $d°R < d°(x - a) = 1$ donc $d°R = 0$
     donc pour tout x réel, $R(x) = Constante$
     alors $P(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$ donc $P(a) = (a - a)Q(a) + R(a)$ donc $R(a) = P(a)$.
     Or pour tout x réel, $R(x) = Constante$
     donc pour tout x réel, $R(x) = R(a) = P(a)$.CQFD

4.2.2 2ème méthode : la Méthode de Horner

Soit le polynôme $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 4$
Pour calculer $P(a)$ il faut normalement 4 additions et 10 multiplications.
Pour le polynôme de degré n :
$P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ le coût du calcul de $P(a)$ en opérations élémentaires(additions et multiplications) est de :
n additions et de $1 + 2 + \cdots . + n$ c'est-à-dire $\dfrac{n(n+1)}{2}$ multiplications .
Quand n devient très grand, $\lim_{n\mapsto+\infty}$ coût $=\lim_{n\mapsto+\infty} n + \dfrac{n(n+1)}{2} = \lim_{n\mapsto+\infty} \dfrac{n^2}{2}$
Donc l'algorithme classique de calcul de $P(a)$ a pour ordre de grandeur n^2
HORNER (mathématicien et physicien anglais 1786-1837) a mis en forme une méthode proposée 150 ans plus tôt par Newton Il propose l'algorithme suivant :
$3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 4 = (((3x - 5)x + 6)x - 2)x + 4$
On se retrouve avec toujours 4 additions mais seulement 4 multiplications.
De façon générale, $a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = (((((a_nx + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots\ldots + a_1)x + a_0$
L'algorithme de Horner coûte n additions et n multiplications
Quand n devient très grand, $\lim_{n\mapsto+\infty}$ coût $=\lim_{n\mapsto+\infty} n + n = \lim_{n\mapsto+\infty} 2n$
Donc l'algorithme de Horner de calcul de $P(a)$ a pour ordre de grandeur n
Il est plus performant donc que l'algorithme classique.
Reprenons l'exemple $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 4$ ici $a_4 = 3$; $a_3 = -5$; $a_2 = 6$; $a_1 = -2$; $a_0 = 4$ d'après Horner $P(x_0) = (((3x_0 - 5)x_0 + 6)x_0 - 2)x_0 + 4$ On pose :

- $h_4 = a_4$
- $h_3 = h_4x_0 + a_3$
- $h_2 = h_3x_0 + a_2$
- $h_1 = h_2x_0 + a_1$
- $h_0 = h_1x_0 + a_0$

donc $P(x_0) = h_0$
On peut disposer les calculs selon le schéma suivant appelé shéma de Horner

a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
	$+x_0h_4$	$+x_0h_3$	$+x_0h_2$	$+x_0h_1$
$= h_4$	$= h_3$	$= h_2$	$= h_1$	$= h_0 = P(x_0)$

Pour notre exemple, prenons $x_0 = 2$

3	-5	6	-2	4
	$+2 \times 3$	$+2 \times 1$	$+2 \times 8$	$+2 \times 14$
$= 3$	$= 1$	$= 8$	$= 14$	$= 32 = P(2)$

1. **Théorème de Horner** $P(x) = (x - x_0)(h_4x^3 + h_3x^2 + h_2x + h_1) + h_0$
2. **Corollaire**
   Si x_0 est une racine de $P(x)$ c'est-à-dire que $P(x_0) = 0 = h_0$
   alors $P(x) = (x - x_0)(h_4x^3 + h_3x^2 + h_2x + h_1)$

4.3 Racines d'un polynôme

4.3.1 Définition d'une racine

On dit que le réel x_0 est une racine ou un zéro du polynôme $P(x)$ ou que x_0 est une solution de l'équation $P(x) = 0$ lorsque $P(x_0) = 0$

4.3.2 Théorème

x_0 est une racine du polynôme $P(x)$ de degré n non nul
$\Leftrightarrow$ $P(x)$ est divisible par $(x - x_0)$
$\Leftrightarrow$ il existe un polynôme $Q(x)$ de $d°(n-1)$ tel que $P(x) = (x - x_0)Q(x)$.

4.3.3 démonstration :

$\Leftarrow$ évident. En effet si $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ alors $P(x_0) = 0Q(x_0) = 0$ donc si x_0 est une racine de $P(x)$ alors $P(x_0) = 0$
$\Rightarrow$
On sait que le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$ est $P(a)$. Donc si x_0 est une racine de $P(x)$ alors $P(x_0) = 0$. Par conséquent le reste de la division de euclidienne de $P(x)$ par $(x - x_0)$ est $P(x_0) = 0$. Donc $P(x) = (x - x_0)Q(x)$.

4.3.4 Corollaire

Soit un polynôme $P(x)$ et 2 réels x_0 et x_1
x_0 et x_1 sont des racines de $P(x) \iff P(x)$ est divisible par $(x - x_0)(x - x_1)$

4.3.5 Corollaire de généralisation

Soit un polynôme $P(x)$ et n réels x_1 , $\cdots$, x_n.
x_1 , $\cdots$, x_n sont des racines de $P(x)$
$\iff P(x)$ est divisible par $(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$

4.3.6 Ordre de multiplicité d'une racine

On dit que α est une racine d'ordre de multiplicité k du polynôme $P(x)$ lorsque $P(x)$ est divisible par $(x-\alpha)^k$ mais pas par $(x - \alpha)^{k+1}$
c'est-à-dire $P(x) = (x - \alpha)^k Q(x)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$

4.3.7 Lien entre le degré et le nombre de racines

Dans $\mathbb{R}[X]$ (c'est-à-dire l'ensemble des polynômes à coefficients réels et à une indéterminée réelle x) un polynôme de degré n admet au maximum n racines.

4.3.8 Corollaire

Un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui a au moins $n + 1$ racines ne peut être que le polynôme nul.

4.4 Détermination de $Q(x)$ lorsque $P(x) = (x-a)Q(x)$

— **1ère méthode : la division euclidienne**
— **2ème méthode : la méthode de Horner**
— **3ème méthode : l'identification des coefficients respectifs des monômes de même degré**
Exemple : Le polynôme $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x - 2$ a pour racine évidente $x = 1$ donc est divisible par $x - 1$
Il s'écrit donc $P(x) = (x-1)Q(x)$ où $d°Q(x) = 3$. Déterminons $Q(x)$
$P(x) = (x-1)Q(x) \iff x^4 - x^3 + x^2 + x - 2 = (x-1)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$
$\iff x^4 - x^3 + x^2 + x - 2 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - ax^3 - bx^2 - cx - d$
$\iff x^4 - x^3 + x^2 + x - 2 = ax^4 + x^3(b-a) + x^2(c-b) + x(d-c) - d$
$\iff a = 1$ et $b - a = -1$ et $c - b = 1$ et $d - c = 1$ et $-d = -2$ par identification des coefficients respectifs de même degré
$\iff a = 1$ et $b = 0$ et $c = 1$ et $d = 2$
En conséquence, $P(x) = (x-1)(x^3 + x + 2)$

4.5 Le polynôme $a^n - b^n$ est divisible par $a - b$

Soient a et b des réels alors pour tout entier naturel $n \geq 2$ l'on a :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

4.5.1 démonstration par récurrence

1. initialisation : cette propriété est vraie au rang $n = 2$ car $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
2. hérédité : soit un entier $k \geq 2$. Supposons que la propriété soit vraie au rang k alors
$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + a^2b^{k-3} + ab^{k-2} + b^{k-1})$
Par conséquent $a^{k+1} - b^{k+1} = aa^k - b^{k+1}$
$= a[b^k + (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + a^2b^{k-3} + ab^{k-2} + b^{k-1})] - b^{k+1}$
$= a[(a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + a^2b^{k-3} + ab^{k-2} + b^{k-1})] + ab^k - b^{k+1}$
$= a[(a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + a^2b^{k-3} + ab^{k-2} + b^{k-1})] + b^k(a-b)$
$= (a-b)[a(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + a^2b^{k-3} + ab^{k-2} + b^{k-1}) + b^k]$
$= (a-b)[a^k + a^{k-1}b + a^{k-2}b^2 + \cdots + a^2b^{k-2} + ab^{k-1} + b^k]$
3. Cette propriété étant initialisée à 2 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier $n \geq 2$

5 Polynômes dérivés successifs

La fonction polynômiale de degré n,
$P : x \mapsto P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, pour tout entier naturel k non nul , on note $P^{(k)}(x)$ le nombre dérivé -k^{ieme} en x.
Par convention, $P^{(0)}(x)$ est $P(x)$

1. $\forall k \in [|1;n|]$ l'on a : $P^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} i(i-1)(i-2)\cdots(i-k+1)a_i x^{i-k}$
2. On en déduit que $\forall k \geq n+1$ l'on a : $P^{(k)}(x) = 0$
3. et que $\forall k \in [|0;n|]$ l'on a : $P^{(k)}(0) = k!\ a_k$
4. d'où $\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$
5. d'où $\forall x \in \mathbb{R} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k$
C'est la **Formule de Taylor-Mac Laurin pour les polynômes**

5.1 démonstration

1. démonstration par récurrence :

   Notons $pr(k)$: $P^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} i(i-1)(i-2)\cdots(i-k+1)a_i x^{i-k}$

   (a) La propriété est vraie pour $k=1$ car $P^{(1)}(x) = (P(x))' = (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i)' = \sum_{i=k}^{n} i a_i x^{i-1}$

   (b) Soit un entier naturel $k \geq 1$ supposons que $P^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} i(i-1)(i-2)\cdots(i-k+1)a_i x^{i-k}$

   alors $P^{(k+1)}(x) = (P^{(k)})'$

   $= (\sum_{i=k}^{n} i(i-1)(i-2)\cdots(i-k+1)a_i x^{i-k})' = \sum_{i=k+1}^{n} i(i-1)(i-2)\cdots(i-k+1)(i-k)a_i x^{i-k-1}$

   (c) La propriété pr étant initialisée à 1 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier naturel $k \geq 1$
2. démonstration par récurrence initialisée à partir du rang $n+1$ évidente
3. évident
4. évident
5. il suffit d'appliquer la propriété précédente à $Q(x) = P(x+\alpha)$

   car $Q(x) = P(x+\alpha)$, $Q'(x) = P'(x+\alpha)$, $Q''(x) = P''(x+\alpha), \cdots$

   d'où $Q(0) = P(\alpha)$, $Q'(0) = P'(\alpha)$, $Q''(0) = P''(\alpha), \cdots$ Or $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} x^k$

   donc $P(x+\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} x^k$ d'où $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (x-\alpha)^k$

5.2 CNS de multiplicité d'une racine

α est une racine d'ordre de multiplicité k du polynôme $P(x)$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

5.2.1 Démonstration

$\Longleftarrow$:

Supposons que $P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Alors $P(X) = \sum_{i \geq 0} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} (X-\alpha)^i)$

$= \frac{P^{(0)}(\alpha)}{0!}(X-\alpha)^1 + \frac{P^{(1)}(\alpha)}{1!}(X-\alpha)^1 + \cdots + \frac{P^{(k-1)}(\alpha)}{(k-1)!}(X-\alpha)^{k-1}$

$+ \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k + \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}(X-\alpha)^{k+1} + \cdots$

$= 0(X-\alpha)^1 + 0(X-\alpha)^1 + \cdots + 0(X-\alpha)^{k-1}$

$+ \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k + \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}(X-\alpha)^{k+1} + \cdots$

$= (X-\alpha)^k [\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} + \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}(X-\alpha) + \cdots] = (X-\alpha)^k Q(x)$

avec $Q(\alpha) = \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \neq 0$ puisque $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$

$\Longrightarrow$:

Supposons que $P(x) = (x-\alpha)^k Q(x)$

avec $Q(\alpha) \neq 0$. En utilisant la formule de Leibniz sur la dérivée n-ème d'un produit de fonctions :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}$$

on a donc $P^{(i)}(x) = [(x-\alpha)^k Q(x)]^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} ((x-\alpha)^k)^{(j)} Q^{(i-j)}(x)$.

Or les dérivées successives de $(x-\alpha)^k$ sont

— à l'ordre 1 : $k(x-\alpha)^{k-1}$
— à l'ordre 2 : $k(k-1)(x-\alpha)^{k-2}$
— à l'ordre 3 : $k(k-1)(k-3)(x-\alpha)^{k-3}$
— $\cdots$
— à l'ordre j : $k(k-1)(k-2)(k-3)\cdots(k-j+1)(x-\alpha)^{(k-j)}$
$= \dfrac{k!}{(k-j)!}(x-\alpha)^{(k-j)}$

Donc $P^{(i)}(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \frac{k!}{(k-j)!}(x-\alpha)^{(k-j)} Q^{(i-j)}(x)$.

— Si $i \leq k-1$, comme $j \leq i$ alors $j \leq k-1$ donc a $k-1 \geq j$ d'où $k-j \geq 1$
Donc, pour tout $j \leq i$, dès qu'on remplacera x par α dans $(x-\alpha)^{(k-j)}$ on obtiendra 0 puisque $k-j \geq 1$
Par conséquent, $P^{(i)}(a) = 0$
— Si $i = k$ alors $P^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{k!}{(k-j)!}(x-\alpha)^{(k-j)} Q^{(k-j)}(x)$
donc $P^{(k)}(\alpha) = \dbinom{k}{k} \dfrac{k!}{(k-k)!}(\alpha-\alpha)^{(k-k)} Q^{(k-k)}(\alpha) = k!Q(\alpha) \neq 0$
puisque $Q(\alpha) \neq 0$.

6 Exercices

6.1 Recherche de 2 nombres connaissant leur somme et leur produit

Démontrer que rechercher deux nombres α et β connaissant leur somme S et leur produit P équivaut à rechercher les solutions éventuelles α et β de l'équation du second degré suivante : $X^2 - SX + P = 0$

6.2 Ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction rationnelle f définie par
$f(x) = \dfrac{x^2 + (1+\pi)x + \pi}{3x^2 + 3(\pi - 4)x - 12\pi}$ puis simplifier $f(x)$

6.3 Résolution d'inéquations

1. Résoudre l'inéquation suivante d'inconnue réelle x :
   $(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 2x + 2) < 0$
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par
   $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 9x + 14}}$

6.4 Résolution d'équations

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle :

1. $ax^2 - (a^2 + 3)x + 3a = 0$ où a est un paramètre réel
2. $(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) - 8 = 0$
3. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

6.5 Equation de degré 6

1. Démontrer que pour tout réel a, l'équation $x^3 = a$ admet une solution unique que l'on appelle racine cubique de a
2. Résoudre l'équation suivante d'inconnue x réelle :

$$x^6 - 35x^3 + 216 = 0$$

6.6 Exercice

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $x^3 - 1$
2. $27x^3 - 1$
3. $x^4 - 4x^2 + 4x - 1$
4. $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$
5. $2x^4 - x^2 - 1$

6.7 Exercice

Montrer que $x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$ est le carré d'un polynôme que l'on déterminera.

6.8 Exercice

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8x + 6}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f.
2. Simplifier $f(x)$ pour tout $x \in D_f$

6.9 Exercice

1. Démontrer que pour tout réel a, l'équation $x^3 = a$ admet une solution unique que l'on appelle racine cubique de a, notée $a^{\frac{1}{3}}$ ou encore $\sqrt[3]{a}$
2. Résoudre l'équation suivante d'inconnue x réelle :
$x^6 - 35x^3 + 216 = 0$

6.10 Commès d'lo

1. Man Doudou offre à son filleul Ti-Bouboule 4 récipients cubiques dont les arêtes mesurent respectivement : 3 cm ; 4 cm ; 5 m et 6 cm.
Ti Bouboule se rend alors dans la salle de bains et verse de l'eau dans les trois premiers cubes qui sont entièrement pleins.
Il verse alors le contenu de ces trois cubes dans le quatrième cube et s'aperçoit alors que ce dernier est plein. cela l'intrigue.
Il va alors chercher une règle, mesure les cubes, utilise sa calculatrice et dit :"Bien sûr, c'est normal !".
Expliquez pourquoi.
2. Ti-Bouboule sachant que vous êtes en classe préparatoire , vient vous trouver et vous pose alors le problème suivant :
Soient 4 cubes dont les arêtes mesurent respectivement x cm ; $(x+1)$ cm ; $(x+2)$ cm et $(x+3)$ cm où x est un entier naturel.
Y a-t-il d'autres valeurs de x pour lesquelles le contenu des cubes des arêtes x ; $x+1$ et $x+2$ remplisse exactement le cube d'arête $x+3$?
Répondez-lui.

6.11 Polynôme d'Interpolation de Lagrange

Soient a, b et c des réels distincts deux à deux.
Soit le polynôme $P(x) = a\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

1. Calculer $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$
2. Soit le polynôme $Q(x) = P(x) - x$
   (a) Démontrer que $Q(x)$ est le polynôme nul.
   (b) En déduire la valeur de x pour tout réel x

6.12 Exercice

Montrer que le polynôme $(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ est divisible par
$x(x+1)(2x+1)$

6.13 Exercice

Montrer que 1 est racine triple de $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$ où $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$

6.14 Exercice

Démontrer que pour tout entier naturel non nul n,
la somme suivante $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ vaut $\dfrac{n(n+1)}{2}$

1. par récurrence
2. par l'astuce de Carl Friedrich GAUSS (utilisée lorsqu'il était gosse !)
3. par la méthode suivante utilisant des polynômes
   (a) déterminer un polynôme de degré 2, $P(x)$ tel que pour tout réel x , l'on a $P(x+1) - P(x) = x$
   (b) En déduire la valeur de S_1.

6.15 Exercice

Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,
$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ vaut $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1. par récurrence
2. par la méthode suivante utilisant des polynômes :
   (a) déterminer un polynôme de degré 3 , $P(x)$ tel que pour tout réel x, l'on a $P(x+1) - P(x) = x^2$
   (b) En déduire la valeur de S_2.

6.16 Polynôme de degré 4 à coefficients symétriques

Soit le polynôme du 4^{eme} degré à coefficients symétriques
$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$

1. Vérifier que 0 n'est pas une racine de $P(x)$
2. On supposera dorénavant que x est non nul.
   (a) Démontrer que $x^4 P(\frac{1}{x}) = P(x)$. En déduire que si x_0 est racine de $P(x)$ alors $\dfrac{1}{x_0}$ l'est aussi
   (b) En posant $Y = x + \dfrac{1}{x}$ démontrer que $x^2(Y^2 + aY + b - 2) = P(x)$
   (c) En déduire que la résolution d'une équation du 4^{eme} degré de la forme $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ se ramène à la résolution d'une équation de degré 2
   (d) Résoudre alors $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ et vérifier que la déduction du 2°) a) est vraie

6.17 Polynôme de degré 6 à coefficients symétriques

Soit le polynôme du 6^{eme} degré à coefficients symétriques
$P(x) = x^6 - 3x^5 + 8x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 3x + 1$

1. Vérifier que 0 n'est pas une racine de $P(x)$
2. On supposera dorénavant que x est non nul. On pose $y = x + \dfrac{1}{x}$
   (a) Vérifier que $y^2 - 2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$
   (b) Vérifier que $y^3 - 3y = x^3 + \dfrac{1}{x^3}$
   (c) Démontrer que $P(x) = x^3(y^3 - 3y^2 + 5y - 3)$
   (d) En déduire la résolution de l'équation $P(x) = 0$

6.18 Polynômes factoriels et Stirling

6.18.1 Les nombres de James Stirling, Ecosse (1692-1770)

Soit la suite des polynômes $(P_n(x))$ où $n \in \mathbb{N}$ appelés polynômes factoriels définis de la façon suivante :
Pour tout réel x

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_n(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n+1) \text{ pour } n \text{ non nul} \end{cases}$$

1. Quel est le degré du polynôme $P_n(x)$?Justifier.
2. Ecrivez les polynômes factoriels suivant sous deux formes une forme factorisée et une forme développée : $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ et $P_4(x)$

6.18.2 Nombres de STIRLING de première espéce s_n^k

On pose $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} s_n^k x^k$. Ces nombres s_n^k s'appellent les nombres de STIRLING de première espèce. Attention , ne confondez pas les s_n^k et les coefficients binomiaux C_n^k ou $\binom{n}{k}$

1. Déterminer les nombres suivants
   (a) s_0^0 ;
   (b) s_1^0 ; s_1^1 ;
   (c) s_2^0 ; s_2^1 ; s_2^2 ;
   (d) s_3^0 ; s_3^1 ; s_3^2 ; s_3^3 ;
   (e) s_4^0 ; s_4^1 ; s_4^2 ; s_4^3 ; s_4^4.
   Justifier
2. Que vaut s_n^k lorsque $k > n$? Justifier.
3. Vérifier que pour tout réel x l'on a : $P_{n+1}(x) = (x-n)P_n(x)$
4. En déduire que pour tout entier k compris entre 1 et n l'on a :
   $s_{n+1}^k = s_n^{k-1} - n s_n^k$
5. Recopier puis compléter le tableau suivant où à l'intersection de la ligne n et de la colonne k l'on trouve s_n^k :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=0$							
$n=1$							
$n=2$							
$n=3$							
$n=4$							
$n=5$							

6.18.3 Nombres de STIRLING de deuxième espèce S_n^k

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $x^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_n^k P_k(x)$.
Ces nombres S_n^k s'appellent les nombres de STIRLING de deuxième espèce.

1. Déterminer x^0 en fonction des polynômes $P_0(x)$, $P_1(x)$,$P_2(x)$, $\cdots$
2. Déterminer x^1 en fonction des polynômes $P_0(x)$, $P_1(x)$,$P_2(x)$, $\cdots$
3. Déterminer x^2 en fonction des polynômes $P_0(x)$, $P_1(x)$,$P_2(x)$, $\cdots$
4. Déterminer x^3 en fonction des polynômes $P_0(x)$, $P_1(x)$,$P_2(x)$, $\cdots$
5. Déterminer x^4 en fonction des polynômes $P_0(x)$, $P_1(x)$,$P_2(x)$, $\cdots$
6. Calculer les nombres
   (a) S_0^0 ;
   (b) S_1^0 ; S_1^1 ;
   (c) S_2^0 ; S_2^1 ; S_2^2 ;
   (d) S_3^0 ; S_3^1 ; S_3^2 ; S_3^3 ;

(e) S_4^0 ; S_4^1 ; S_4^2 ; S_4^3 ; S_4^4.

Justifier.

7. Que vaut S_n^0 lorsque $n > 0$? Justifier.
8. Que vaut S_n^k lorsque $k > n$? Justifier.
9. Démontrer pour tout entier k compris entre 1 et $n+1$ l'on a :

$$S_{n+1}^k = S_n^{k-1} + kS_n^k$$

10. Compléter alors le tableau suivant où à l'intersection de la ligne n et de la colonne k l'on trouve S_n^k :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=0$							
$n=1$							
$n=2$							
$n=3$							
$n=4$							
$n=5$							

6.19 Polynômes de Bernstein - AgregInterne 14 ep2

Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ alors on appelle polynôme de Bernstein d'ordre n

le polynôme $B_{n,k}$ donné par : $B_{k,n}(X) = \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$

On considère $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de Bernoulli de paramètre $x \in [0;1]$

1. Déterminer la loi de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$
2. En déduire :
   (a) que $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$ l'on a : $0 \le B_{k,n}(x) \le 1$
   (b) que $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$ l'on a : $B_{k,n}(x) = B_{n-k,n}(1-x)$
   (c) la valeur de $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$ l'on a : $\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(x)$
   (d) la valeur de $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$ l'on a : $\sum_{k=0}^{n} k\ B_{k,n}(x)$
   (e) la valeur de $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$ l'on a : $\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\ B_{k,n}(x)$

6.20 Oral Hec 15

1. Soit un trinôme $P(x)$. On sait que $\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) \ge 0$.
   Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) + P'(x) + P"(x) \ge 0$
2. On suppose maintenat que $P(x)$ est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ et que $\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) \ge 0$.

   (a) Que peut-on dire de la parité de n ?
   (b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) + P'(x) + P"(x) + \cdots + P^{(n)} \ge 0$

6.21 Polynômes de Tchebychev

1. (a) A l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer $(1+1)^n$ sous deux formes différentes.
   (b) A l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer $(1-1)^n$ sous deux formes différentes.
   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{l=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^l \binom{n}{2l} = 2^{n-1}$
2. Démontrer l'existence et l'unicité d'un polynôme T_n à coefficients réels tel que
$$\forall\theta \in \mathbb{R} \qquad cos(n\theta) = T_n(\theta)$$
3. Quel est degré de T_n ? Quel est son coefficient dominant ?
4. Déterminer $T_1(X), T_2(X)$ et $T_3(X)$.
5. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} \quad cos(nx) = 2cos(x)cos((n-1)x) - cos((n-2)x)$
6. En déduire que $T_n(X) = 2XT_{n-1}(X) - T_{n-2}(X)$
7. Déterminer $T_3(X)$ et $T_5(X)$.

6.21.1 Corrigé

1. (a) $S = 2^n = (1+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$.
   (b) $D = 0 = (1-1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$
   (c) En additionnant les deux expressions précédentes on en déduit la somme des coefficients binomiaux d'ordre pair :
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \sum_{l=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^l \binom{n}{2l} = \frac{S+D}{2} = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$$
2. (a) Existence :
   D'après la formule de Moivre $(cos(\theta) + isin(\theta))^n = cos(n\theta) + i\sin(\theta)$
   D'après la formule du binôme de Newton,$(cos(\theta) + isin(\theta))^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} cos^{n-k}(\theta)(isin(\theta))^k$
   En identifiant les parties réelles on a donc :
$$cos(n\theta) = \sum_{l=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n}{2l} cos^{n-2l}(\theta)(isin(\theta))^{2l} = \sum_{l=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n}{2l} (-1)^l cos^{n-2l}(\theta)(1 - cos^2(\theta))^l$$
   car $i^{2l} = (i^2)^l = (-1)^l$ et $sin^{2l}(\theta) = (1 - cos^2(\theta))^l$
   On pose alors $T_n(X) = \displaystyle\sum_{l=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^l \binom{n}{2l} X^{n-2l}(1-X^2)^l$.
   (b) Unicité :
   Supposons qu'il y ait deux polynômes T_n et U_n tels que $\forall\theta \in \mathbb{R} \qquad cos(n\theta) = T_n(\theta) = U_n(\theta)$.
   Alors $(T_n - U_n)(cos(x)) = 0$ donc le polynôme $T_n - U_n$ aurait une infinité de racines donc est nul donc $T_n - U_n = 0$ donc $T_n = U_n$.
3. Le polynôme T_n ne comporte que des monômes de degré inférieur ou égal à n.
   Le coefficient du terme en X^n est $\displaystyle\sum_{l=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n}{2l} = 2^{n-1}$ donc est non nul donc le degré de $T_n = n$ et le coefficient dominant est 2^{n-1}.
4. (a) $T_1(cos(x)) = cos(x)$ donc $T_1(X) = X$
   (b) $T_2(cos(x)) = cos(2x) = 2cos^2(x) - 1$ donc $T_2(X) = 2X^2 - 1$

   (c) $T_3(cos(x)) = cos(3x) = 4cos^3(x) - 3cos(x)$ donc $T_3(X) = 4X^3 - 3X$

5. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} \quad cos(nx) = 2cos(x)cos((n-1)x) - cos((n-2)x)$
6. En déduire que $T_n(X) = 2XT_{n-1}(X) - T_{n-2}(X)$
7. Déterminer $T_3(X)$ et $T_5(X)$.

6.22 Polynômes de Bernoulli

6.23 Polynômes de Legendre