Corrigé Bac Antilles S 2017

Christian CYRILLE
Professeur Agrégé Chaire Supérieure CPGE Lycée Bellevue (1997-2015)
Lycée Schoelcher (1973-2001)

4 juillet 2017

1 Exercice 1 - 3 points

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation

$$(E): \quad z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Donner une solution entière de (E).
2. Démontrer que pour tout nombre complexe z ,
$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1)$$
3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.
4. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe telque $ABCD$ est un quadrilatère non croisé.
Le quadrilatère $ABCD$ est-il un losange ? Justifier.

1.1 Corrigé

Culture générale :
L'équation (E) : $\quad z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$ *est une équation de degré* 4 *d'inconnue complexe donc d'après le Théorème de D'Alembert-Gauus cette équation admettra* 4 *racines complexes distinctes ou confondues.*

1. Une solution entière évidente de (E) est $z = 1$ car $1^4 + 2(1^3) - 1 - 2 = 1 + 2 - 3 = 0$.
2. Pour tout nombre complexe z,
$(z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) = z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z - 2 = z^4 + 2z^3 - z - 2$
3. $\forall z \in C \quad z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0 \iff (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) = 0 \iff z^2 + z - 2 = 0$ ou $z^2 + z + 1 = 0$.
Résolvons d'abord $z^2 + z - 2 = 0$
   — Méthode 1 : $z^2 + z - 2 = 0$ a une solution évidente $z' = 1$.
   Or le produit des solutions x' et $x"$ d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ lorsqu'elles existent est $x'x" = \dfrac{c}{a}$
   Donc l'autre solution $z"$ de $z^2 + z - 2 = 0$ est telle que $z'z" = \dfrac{-2}{1}$ donc $1z" = -2$ donc $z" = -2$
   — Méthode 2 : Pour résoudre on calcule son discriminant $\Delta = (1)^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9 > 0$ donc $z^2 + z - 2 = 0$ a deux solutions $z' = \dfrac{-1 + \sqrt{9}}{2} = \dfrac{-1 + 3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$
   et $z' = \dfrac{-1 - \sqrt{9}}{2} = \dfrac{-1 - 3}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$
Résolvons ensuite $z^2 + z + 1 = 0$
$\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 < 0$ donc $z^2 + z + 1 = 0$ a deux solutions $z' = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z' = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

Culture générale :

$\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1(cos(\dfrac{2\pi}{3}) + isin(\dfrac{2\pi}{3})) = e^{i\dfrac{2\pi}{3}}$ *se note j*

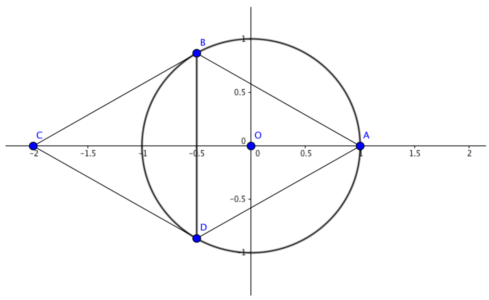
$z' = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1(cos(\dfrac{4\pi}{3}) + isin(\dfrac{4\pi}{3}))e^{i\dfrac{2\pi}{3}} = j^2 = \bar{j}$

Par conséquent,

$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0 \iff z = 1 \text{ ou } z = -2 \text{ ou } z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = j \text{ ou } z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = j^2 = \bar{j}$$

4. Représentons ces 4 solutions par des points A, B, C, D.

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\ \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{2}\\ \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$



$D\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\ \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{2}\\ \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors le quadrilatère $ABCD$ est un parallèlogramme .

La diagonale (AC) est l'axe des abscisses et l'autre diagonale est la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ qui est parallèle à l'axe des ordonnées.

$ABCD$ est un parallèlogramme avec ses deux diagonales perpendiculaires donc c'est un losange.

2 Exercice 2 - 4 points

2.1 Corrigé

1. (a) Notons F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(25;\sigma_1)$.
Une pièce est conforme lorsque $22,8 < X < 27,2$. $27,2$ et $22,8$ sont à la même distance $2,2$ de la moyenne $\mu = 25$.
Par conséquent $F(22,8) = Pr([X < 22,8] = Pr([X > 27,2] \approx 0,023$
D'où $Pr([22,8 < X < 27,2] = 1 - 2F(22,8) \approx 1 - 2(0,023) = 0,954$

   (b) Comme l'on sait que pour la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ on a $Pr([\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma] \approx 0,954$ alors $2\sigma_1 = 27,2 - 25$ donc $\sigma_1 = \dfrac{2,2}{2} = 1,1$

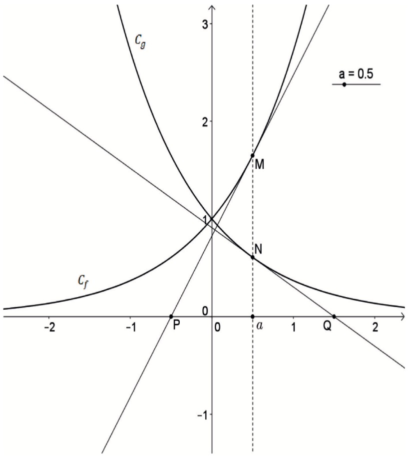
   (c) $Pr_{[22,8<X<27,2]}([X < 24]) = \dfrac{Pr([22,8 < X < 27,2] \cap [X < 24])}{Pr([22,8 < X < 27,2])} = \dfrac{Pr([22,8 < X < 24] \cap [X < 24]}{0,954}$
$= \dfrac{0,1589}{0,954} = 0,167$

2. (a) En admettant que $Pr[22,8 < Y < 27,2] \approx 0,98$ et comme $0,98 > 0,945$ alors forcément $\sigma_2 < \sigma_1$

   (b) Pour la population de pièces, la probabilité théorique est $p = 0,98$.
Soit l'échantillon de $n = 500$ pièces. Les 3 conditions $n \geq 30, np = 500 \times 0,98 = 490 \geq 5; n(1-p) = 50 \times 0,02 = 10 \geq 5$ sont réunies donc on peut détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence f.
Au seuil $\alpha = 0.95$ alors $t_\alpha = 1,96$ et cet intervalle est $I = [p - t_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + t_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$
$I = [0,98 - 1,96 \dfrac{\sqrt{0,98(0,02)}}{\sqrt{500}}; 0,98 + 1,96 \dfrac{\sqrt{0,98(0,02)}}{\sqrt{500}}] = [0,967; 0,992]$
Le nombre de pièces conformes dans l'échantillon est $500 - 15 = 485$ donc la fréquence est $f = \dfrac{485}{500} \approx 0.97$
$f \in I$ donc on peut accepter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs.

3 Exercice 3 - 3 points

3.1 Corrigé



	A	B
1	Abscisse a	Longueur PQ
2	-3	2
3	-2.5	2
4	-2	2
5	-1.5	2
6	-1	2
7	-0.5	2
8	0	2
9	0.5	2
10	1	2
11	1.5	2
12	2	2
13	2.5	2
14		

1. — f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in R \quad f'(x) = e^x$
   — g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in R \quad g'(x) = -e^{-x}$
   — La tangente à $\mathcal{C}_f$ en M d'abscisse a a pour pente ou coefficient directeur $m = f'(a) = exp(a) = e^a$
   — La tangente à $\mathcal{C}_g$ en N d'abscisse a a pour pente ou coefficient directeur $n = g'(a) = -exp(-a) = -e^{-a}$
   — Le produit des deux coefficients directeurs est $mn = e^a(-e^{-a}) = -e^a e^{-a} = -e^{a-a} = -e^0 = -1$
   — Par conséquent, ces deux tangentes sont perpendiculaires.
2. (a) D'après le tableur lié au logiciel on peut conjecturer que $PQ = 2$.
   (b) — La tangente à $\mathcal{C}_f$ en M d'abscisse a a pour équation $y = e^a(x-a) + e^a$ donc coupe l'axe des abscisses en $P(x_P, 0)$ tel que $0 = e^a(x_P - a) + e^a$ donc $e^a(x_P - a) = -e^a$ donc en divisant les deux membres par $e^a \neq 0$ car une exponentielle est toujours strictement positive
   on obtient $x_P - a = -1$ d'où $x_P = a - 1$ donc $P(a-1, 0)$
   — La tangente à $\mathcal{C}_g$ en N d'abscisse a a pour équation $y = -e^{-a}(x-a) + e^{-a}$ donc coupe l'axe des abscisses en $Q(x_Q, 0)$ tel que $0 = -e^{-a}(x_Q - a) + e^{-a}$ donc $e^{-a}(x_Q - a) = e^{-a}$ donc en divisant les deux membres par $e^{-a} \neq 0$ car une exponentielle est toujours strictement positive
   On obtient $x_Q - a = 1$ d'où $x_Q = a + 1$ donc $Q(a+1, 0)$
   — Alors $PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{(a+1-a+1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4} = 2$ CQFD.

4 Exercice 4 - 5 points

4.1 Corrigé

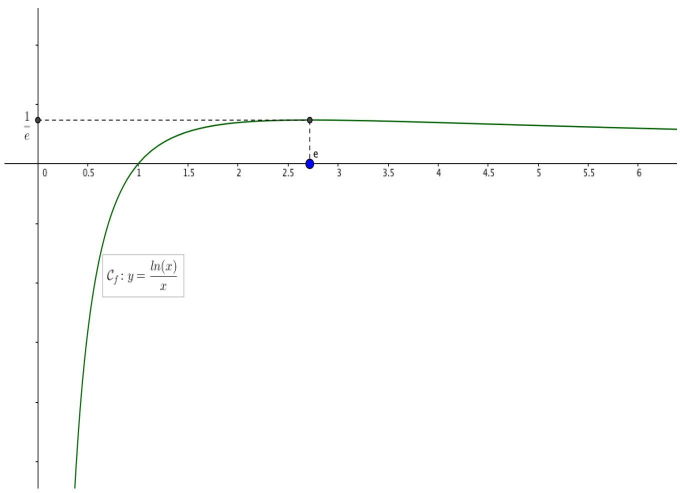
4.1.1 Partie A

1. — La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$
   — La fonction $Id : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0;+\infty[$
   — La fonction $Id : x \mapsto x$ ne s'annule jamais sur $]0;+\infty[$
   — Par conséquent, la fonction f qui est le quotient des fonctions ln et Id est dérivable sur $]0;+\infty[$
   — $\forall x > 0 \quad f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}x - 1(ln(x))}{x^2} = \dfrac{1-ln(x)}{x^2}$ de signe celui de $1 - ln(x)$ car $x^2 > 0$
   — $1 - ln(x) = 0 \iff 1 = ln(x) \iff x = e$
   — $1 - ln(x) > 0 \iff 1 > ln(x) \iff x < e$
   d'où le tableau de variations suivant

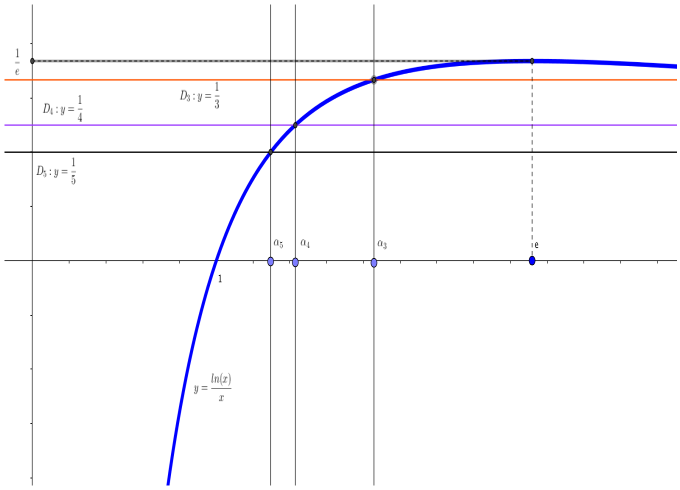
x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

   car
   — $lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = lim_{x\mapsto+\infty} \dfrac{ln(x)}{x} = 0$
   — $lim_{x\mapsto 0^+} f(x) = -\infty$ car $lim_{x\mapsto 0^+} ln(x) = -\infty$ et $lim_{x\mapsto 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$
2. f admet un maximum $f(e) = \dfrac{ln(e)}{e} = \dfrac{1}{e}$ en $x = e$

4.1.2 Partie B



1. — f est continue sur $]0;e[$ (car elle y est dérivable) et f est strictement croissante sur $]0;e[$
   — l'intervalle image de $]0;e[$ est $]-\infty;\frac{1}{e}[$
   — donc tout y de l'intervalle $]-\infty;\frac{1}{e}[$ admet un unique antécédent x dans $]0;e[$ pour f.
   c'est-à-dire que $\forall y \in]-\infty;\frac{1}{e}[$ l'équation y = f(x) admet une solution unique $x \in]0;e[$
   — Or $e \approx 2,718$ et $n \geq 3$ donc $n \geq e$ d'où $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{e}$ donc $\frac{1}{n} \in]-\infty;\frac{1}{e}[$
   — Par conséquent , l'équation (E_n) : $\dfrac{ln(x)}{x} = \dfrac{1}{n}$ admet une solution unique α_n dans $]0;e[$



2. (a) D'après le graphique, on remarque que $\alpha_5 < \alpha_4 < \alpha_3$. Nous allons donc conjecturer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

   (b) Soit $n \geq 3$ alors comme $\frac{ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$ admet une solution unique α_n dans $]0; e[$ alors $f(\alpha_n) = \frac{ln(\alpha_n)}{\alpha_n} = \frac{1}{n}$
   De même, $f(\alpha_{n+1}) = \frac{ln(\alpha_{n+1})}{\alpha_{n+1}} = \frac{1}{n+1}$
   Or $n < n+1$ donc $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ d'où $f(\alpha_n) > f(\alpha_{n+1})$.
   Or $\alpha_n \in]0; e[$; $\alpha_{n+1} \in]0; e[$;f est strictement croissante sur $]0; e[$ et $f(\alpha_n) > f(\alpha_{n+1})$ donc $\alpha_n > \alpha_{n+1}$
   La suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ est donc strictement décroissante.

   (c) $\forall n \geq 3 \quad \alpha_n \in]0; e[$ donc la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ est minorée par 0. Comme de plus, elle est décroissante alors elle converge vers un nombre $L \geq 0$

3. — f est continue sur $]e; +\infty[$ car elle y est dérivable.
   — f est strictement décroissante sur $]e; +\infty[$
   — l'intervalle image de $]e; +\infty[$ est $]0; \frac{1}{e}[$
   — donc tout y de l'intervalle $]0; \frac{1}{e}[$ admet un unique antécédent x dans $]e; +\infty[$ pour f.
   c'est-à-dire que $\forall y \in]0; \frac{1}{e}[$ l'équation y = f(x) admet une solution unique $x \in]e; +\infty[$
   — Or $e \approx 2,718$ et $n \geq 3$ donc $n \geq e$ d'où $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{e}$ donc $\frac{1}{n} \in]0; \frac{1}{e}[$
   — Par conséquent , l'équation (E_n) : $\frac{ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$ admet une solution unique β_n dans $]e; +\infty[$

   (a) Soit $n \geq 3$ alors comme $\frac{ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$ admet une solution unique β_n dans $]e; +\infty[$
   alors $f(\beta_n) = \frac{ln(\beta_n)}{\beta_n} = \frac{1}{n}$. De même, $f(\beta_{n+1}) = \frac{ln(\beta_{n+1})}{\beta_{n+1}} = \frac{1}{n+1}$
   Or $n < n+1$ donc $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ d'où $f(\beta_n) > f(\beta_{n+1})$. Or $\beta_n \in]e; +\infty[$; $\beta_{n+1} \in]e; +\infty[$;
   f est strictement décroissante sur $]e; +\infty[$ et $f(\beta_n) > f(\beta_{n+1})$ donc $\beta_n < \beta_{n+1}$
   La suite $(\beta_n)_{n\geq 3}$ est donc strictement croissante.

   (b) Démontrons que $\forall n \geq 3 \quad \beta_n \geq n\frac{\beta_3}{3}$.
   — Comme la suite $(\beta_n)_{n\geq 3}$ est croissante alors $\beta_n \geq \beta_3$ donc $ln(\beta_n) \geq ln(\beta_3)$ car ln est croissante.
   — Or $\frac{ln(\beta_n}{\beta_n} = \frac{1}{n}$ et $\frac{ln(\beta_3}{\beta_3} = \frac{1}{3}$ donc $\frac{\beta_n}{n} = ln(\beta_n)$ et $\frac{\beta_3}{3} = ln(\beta_3)$
   — d'où $\frac{\beta_n}{n} \geq \frac{\beta_3}{3}$ donc $\beta_n \geq n\frac{\beta_3}{3}$. CQFD

   (c) Comme $\beta_n \geq n\frac{\beta_3}{3}$ et que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n = +\infty$ alors par comparaison $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \beta_n = +\infty$

5 Exercice 5 - 5 points - enseignement obligatoire

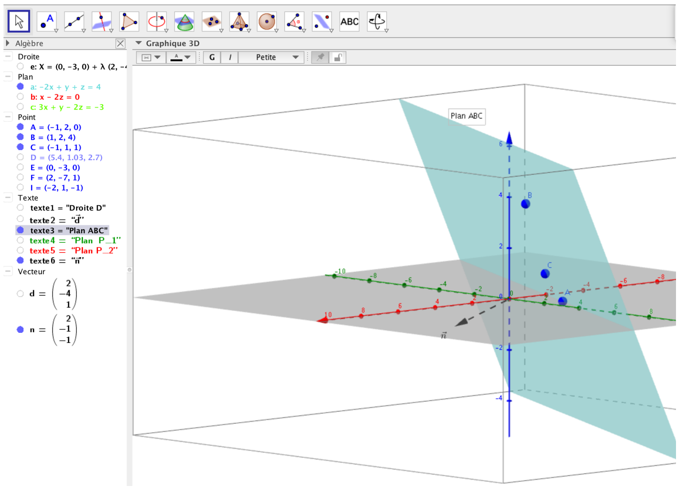
On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
On considère les points $A(-1;2;0), B(1;2;4)$ et $C(-1;1;1)$

1. (a) Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.
   (b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
   (c) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré.
2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$
   (a) Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $3x+y-2z+3=0$ et soit $\mathcal{P}_2$ le plan passant par O et paralllèle au plan d'équation $x-2z+6=0$
   (a) Démontrer que le plan $\mathcal{P}_2$ a pour équation $x=2z$.
   (b) Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
   (c) Soit la droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est $\exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x=2t \\ y=-4t-3 \\ z=t \end{cases}$
   Démontrer que $\mathcal{D}$ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$
4. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

5.1 Corrigé

1. (a) $A\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$
   $B\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix}$
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires car s'ils l'étaient on aurait $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$ d'où $\begin{cases}2=-2k\\0=-1k\\4=-3k\end{cases}$
   d'où $\begin{cases}k=-1\\k=0\\k=\dfrac{-4}{3}\end{cases}$ Impossible donc les points A, B, C ne sont pas alignés.
   (b) $A\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$
   $A\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$
   Par conséquent, le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2\times 0+0\times -1+4\times 1=4$
   (c) Comme $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times cos(\widehat{BAC})$
   $AB=\sqrt{2^2+0^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$
   $AC=\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$
   Par conséquent $cos(\widehat{BAC})=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\dfrac{4}{2\sqrt{5}\sqrt{2}}=\dfrac{4}{2\sqrt{10}}$ $cos(\widehat{BAC})=\dfrac{2}{\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$
   Donc une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est $arcos(\dfrac{\sqrt{10}}{5})\approx 51°$.
2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

(a) — $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2 \times 2 + (-1) \times 0 + (-1) \times 4 = 0$
— $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 0 + (-1) \times (-1) + (-1) \times 1 = 0$
— $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan ABC
donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).



(b) Comme $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ donc une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y - z + d = 0$
Il reste à déterminer la valeur de d.
Comme $A\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ appartient au plan ABC alors $2(-1) - 2 + 0 + d = 0$ donc $d = 4$.
(ABC) a pour équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$

3. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et soit $\mathcal{P}_2$ le plan passant par O et paralllèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$

(a) Le plan $\mathcal{P}_2$ est parallèle au au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$ donc il a même vecteur normal que ce plan, donc son vecteur normal a pour coordonnées $\vec{m}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$.
Par conséquent, $\mathcal{P}_2$ a une équation cartésienne de la forme $x - 2z + d = 0$ mais comme $\mathcal{P}_2$ contient $O\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ alors $0 - 2(0) + d = 0$ donc $d = 0$ Le plan $\mathcal{P}_2$ a donc pour équation $x = 2z$.

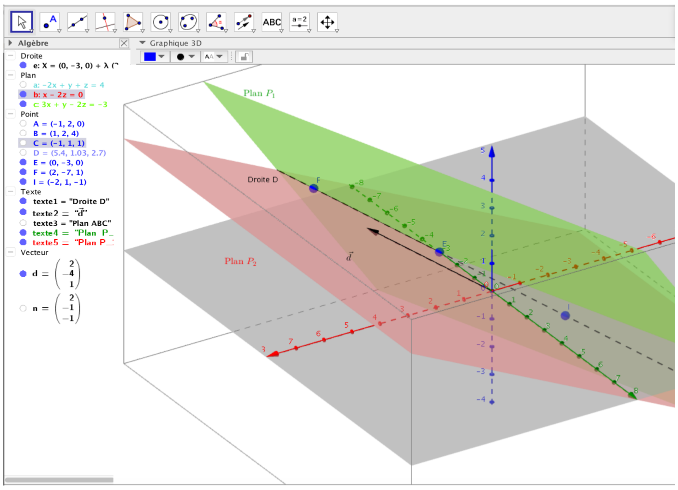
(b) — Le plan $\mathcal{P}_1$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$
— Le plan $\mathcal{P}_2$ a pour vecteur normal $\vec{m}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$
— Ces deux vecteurs normaux ne sont pas colinéaires . en effet s'ils l'étaient on aurait $\begin{cases} 2 = 1k \\ -1 = 0k \\ -1 = -2k \end{cases}$
ce qui est impossible.
Par conséquent, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite forcément.

(c) Soit la droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est $\exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{cases}$
Si $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ alors $\begin{cases} 3x + y - 2z + 3 = 0 \\ x = 2z \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = 2z \\ 3x + y - x + 3 = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x = 2z \\ y = -2x - 3 \end{cases}$

donc $\exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{cases}$

donc $M \in \mathcal{D}$ et cette droite $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$

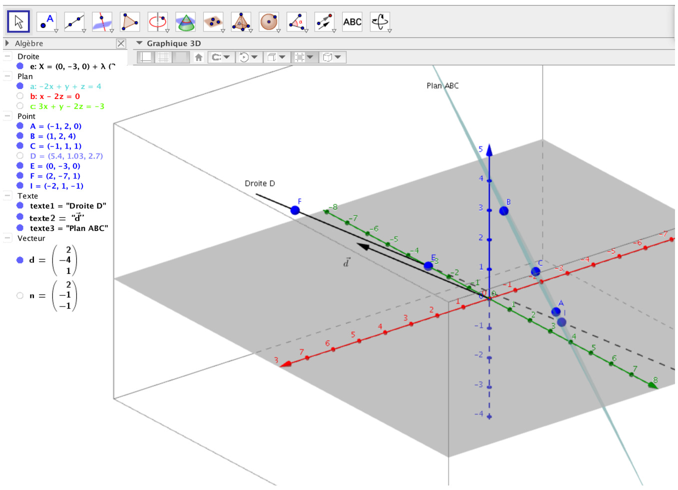
4. — D'après son système d'équations paramétriques, on peut dire qu'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{d}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Or $\vec{n}.\vec{d} = 2(2) + (-1)(-4) + (-1)(1) = 7 \neq 0$ donc ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux donc $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle au plan (ABC) donc va couper ce plan (ABC)en un point I



— Si $I\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in ABC \cap \mathcal{D}$ alors $\begin{cases} 2x - y - z + 4 = 0 \\ x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{cases}$ donc $4t - (-4t - 3) - t + 4 = 0$ donc $7t + 7 = 0$

donc $t = -1$ donc $I\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

— donc la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan (ABC) en I.



6 Exercice 5 - enseignement de spécialité - 5 points

6.1 Corrigé

1. Démontrons par récurrence la propriété suivante : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 9 \times 2^n - 6$
   - Initialisation :
     $u_0 = 3$ et $9 \times 2^0 - 6 = 9(1) - 6 = 9 - 6 = 3$ donc cette propriété est vraie pour $n = 0$
   - Hérédité :
     Supposons que pour un certain entier naturel n l'on ait $u_n = 9 \times 2^n - 6$.
     Comme $u_{n+1} = 2u_n + 6 = 2(9 \times 2^n - 6) + 6 = 9 \times 2^{n+1} - 12 + 6 = 9 \times 2^{n+1} - 6$
   - Conclusion :
     La propriété est initialisée en $n = 0$ et étant héréditaire est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors
   $u_n = 9 \times 2^n - 6 = (6+3) \times 2^n - 6 = 6 \times 2^n + 3 \times 2^n - 6 = 6 \times 2^n + 3 \times 2 \times 2^{n-1} - 6 = 6(2^n + 2^{n-1} - 1)$
   donc u_n est divisible par 6.

Attention ! On est obligé de prendre $n \geq 1$ pour être sûr que 2^n et 2^{n-1} soient des entiers . en effet, si $n = 0$ alors $n - 1 = -1$ et $2^{n-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ ne serait pas entier.

3. $\forall n \geq 1 \quad v_n = \frac{u_n}{6}$ donc
   - $u_0 = 3$ alors $u_1 = 2u_0 + 6 = 2(3) + 6 = 12$ donc $v_1 = \frac{12}{6} = 2$ est premier.
   - $u_2 = 2u_1 + 6 = 2(12) + 6 = 24 + 6 = 30$ donc $v_2 = \frac{u_2}{6} = \frac{30}{6} = 5$ est premier
   - $u_3 = 2u_2 + 6 = 2(30) + 6 = 60 + 6 = 66$ donc $v_3 = \frac{u_3}{6} = \frac{66}{6} = 11$ est premier
   - $u_4 = 2u_3 + 6 = 2(66) + 6 = 132 + 6 = 138$ donc $v_4 = \frac{u_4}{6} = \frac{138}{6} = 23$ est premier
   - $u_5 = 2u_4 + 6 = 2(138) + 6 = 276 + 6 = 282$ donc $v_5 = \frac{u_5}{6} = \frac{282}{6} = 47$ est premier
   - $u_6 = 2u_5 + 6 = 2(282) + 6 = 564 + 6 = 570$ donc $v_6 = \frac{u_6}{6} = \frac{570}{6} = 95 = 5 \times 19$ n'est pas premier

   Par conséquent, l'affirmation "Pour tout entier naturel non nul, v_n est un nombre premier " est fausse.
4. (a) $\forall n \geq 1 \quad v_{n+1} - 2v_n = \frac{u_{n+1}}{6} - 2\frac{u_n}{6} = \frac{u_{n+1} - 2u_n}{6} = \frac{6}{6} = 1$ car $u_{n+1} = 2u_n + 6$
   (b) Le Théorème de Bachet de Méziriac et d'Etienne Bezout énonce que si il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$ alors les entiers a et b sont premiers entre eux.
   Ici on peut donc dire que v_{n+1} et v_n sont premiers entre eux car $u = 1$ et $v = -2$
   (c) Si d divise u_n et u_{n+1} alors comme u_n est divisible par 6 alors $\frac{d}{6}$ divise $\frac{u_n}{6}$ et $\frac{u_{n+1}}{6}$ donc $\frac{d}{6}$ divise v_n et v_{n+1}. Mais v_{n+1} et v_n sont premiers entre eux donc $\frac{d}{6} = 1$ donc $d = 6$
   Par conséquent, le pgcd de u_n et u_{n+1} est 6
5. (a) $2^4 = 16 = 3 \times 5 + 1 \equiv 1 \ [mod\ 5]$
   (b) Supposons que $n = 4k + 2$ donc $u_n = 9 \times 2^n - 6 = 9 \times 2^{4k+2} - 6 = 9 \times (2^4)^k \times 2^2 - 6 = 36 \times (2^4)^k - 6$
   Or $2^4 \equiv 1 \ [mod\ 5]$ donc $(2^4)^k \equiv 1^k \equiv 1 \ [mod\ 5]$ donc $(2^4)^k = 5q + 1$.
   Par conséquent, $u_n = 36 \times (2^4)^k - 6 = 36(5q + 1) - 6 = 36 \times 5q + 30 = 5(36q + 6)$.
   u_n est donc divisible par 5.
   (c) Certains u_n ne sont pas divisibles par 5 par exemple $u_1 = 12$ ou encore $u_3 = 66$.