Concours général

19 octobre 2017

Chapitre 1

Ter CE - 1991

1.1 Sujet

Durée : 5 heures.
La calculatrice électronique de poche est autorisée.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.
Les 5 exercices sont indépendants.

1.1.1 Exercice 1

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que, pour tout nombre entier naturel n :

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = (x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2$$

   Démontrer que, pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel m tel que :

$$x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{m(m+1)}{2}$$

2. Si n et p sont deux nombres entiers naturels non nuls, on pose :

$$S_{n,p} = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$$

   Déterminer les entiers naturels non nuls p tels que, quelque soit l'entier naturel non nul n, $S_{n,p}$ soit le carré d'un nombre entier naturel.

1.1.2 Exercice 2

A tout entier naturel non nul n, on associe l'application f_n de la variable réelle x définie pour $x \geq n$ par :

$$f_n(x) = \sqrt{x-n}+\sqrt{x-n+1}+\cdots+\sqrt{x-1}+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\cdots+\sqrt{x+n}-2(n+1)\sqrt{x}$$

1. Dans cette question, l'entier n est fixé.
   Démontrer que f_n est croissante et que $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f_n(x) = 0$

2. Déterminer $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} f_n(n) = 0$

1.1.3 Exercice 3

Soit S un point fixe d'une sphère fixe (Σ) de centre Ω. On considère les tétraèdres $SABC$ inscrits dans la sphère (Σ) et dont les arêtes issue de S sont deux à deux orthogonales.

1. Démontrer que les plans (ABC) passent par un point fixe.
2. Pour un tel tétraèdre$SABC$, le point S et le centre Ω de la sphère (Σ) se projettent orthogonalement sur le plan (ABC) respectivement en H et en O.
   On note R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.
   Démontrer que $R^2 = OH^2 + 2SH^2$

1.1.4 Exercice 4

Soit p un nombre entier naturel et $n = 2^p$.
On considère les parties A de l'ensemble $E = \{1, 2, \cdots, n\}$ possédant la propriété suivante :

$$\text{Si } x \in A \text{ alors } 2x \notin A$$

Déterminer le nombre maximal d'éléments d'une telle partie A.

1.1.5 Exercice 5

1. On considère l'application

   $$\begin{array}{rccrl} P: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \\ & z & \longmapsto & P(z) = & z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z \end{array}$$

   où a_1, a_2, a_3 et a_4 sont quatre nombres complexes donnés.

   On pose $w_l = e^{\frac{2il\pi}{5}}$ où l désigne un nombre entier compris entre 0 et 4.
   Démontrer que $P(w_0) + P(w_1) + P(w_2) + P(w_3) + P(w_4) = 5$
2. Soient A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 cinq points du plan.
   On construit un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre A_1 et de rayon donné R.
   Démontrer qu'il existe un sommet S du pentagone tel que :

   $$SA_1.SA_2.SA_3.SA_4.SA_5 \geq R^5$$