Bac Nantes C 1969

17 novembre 2017

1 Problème

Soit la fonction numérique de la variable réelle f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 – 9x}{3(x^2 – 1)}$

1.1 Partie A

1. f est une fonction fraction rationnelle donc $D_f = \{x/3(x^2–1) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1; 1\} =]-\infty; -1[\bigcup]-1; 1[\bigcup]1; +\infty[$ car $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$
2. D_f admet O comme centre de symétrie donc $\forall x \in D_f$ ona $-x \in D_f$ et de plus $f(-x) = \dfrac{(-x)^3–9(-x)}{3((-x)^2–1)} = \dfrac{-x^3 + 9x}{3(x^2–1)} = -f(x)$ donc f est impaire. On étudiera f sur $E_f = D_f \bigcap \mathbb{R}^+ = [0; 1[\bigcup]1; +\infty[$
3. f est une fonction rationnelle donc est dérivable sur son D_f donc sur E_f
4. $f'(x)$ est égal à $\dfrac{(x^2 + 3)^2}{3(x^2–1)^2}$ pour tout x de E_f
5. En déduire les variations de f sur E_f
6. Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble d'étude E_f
7. Dresser le tableau de variations de f sur E_f
8. Démontrer que pour tout x appartenant à D_f , l'on a : $f(x) = \dfrac{x}{3} + \epsilon(x)$ où $\epsilon(x) = \dfrac{-8x}{3(x^2–1)}$
9. En déduire que la courbe représentative de f, notée (C) admet au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ une asymptote oblique (D) dont on donnera une équation cartésienne.
10. Préciser les positions relatives de (C) et de (D)
11. Tracer ensuite avec soin (C) et ses asymptotes dans un repère orthonormé après avoir déterminer les points d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses, le point d'intersection de (C) et de l'axe des ordonnées ainsi que les pentes des tangentes à (C) en ces points. Ces tangentes seront dessinées sur la figure.

1.2 Partie B

1. Démontrer graphiquement que l'équation suivante $\dfrac{x^3–9x}{3(x^2–1)} = m$ d'inconnue réelle x et où m est un paramètre réel admet toujours 3 solutions. Que pouvez-vous dire précisément de la position de ces 3 solutions ?
2. Soit un nombre réel a différent de –1 et de 1. Soit l'équation suivante $(E) : \dfrac{x^3–9x}{3(x^2–1)} = \dfrac{a^3–9a}{3(a^2–1)}$ d'inconnue réelle x
   (a) Combien de solutions aura au maximum cette équation ? Justifier.
   (b) Cette équation a une solution évidente . Quelle est–elle ?
   (c) Déterminer que les deux autres solutions de cette équation qui dépendent aussi du réel a sont $u(a) = \dfrac{a-3}{a+1}$ et $v(a) = \dfrac{-a-3}{a-1}$
   (d) Tracer la courbe représentative C_u de la fonction $u : a \mapsto u(a)$ dans un repère orthonormé R_1 de centre W. On appellera $a'Wa$ l'axe des abscisses de R_1 et $z'Wz$ l'axe des ordonnées de R_1.
   (e) Vérifier que pour tout $a \neq -1$ et $a \neq 1$, $v(a) = -u(-a)$
   (f) Expliquer comment on peut construire C_v à partir de C_u .
   En déduire le tracé avec une autre couleur de la courbe représentative C_v de la fonction $v : a \mapsto v(a)$ dans le repère R_1.
   (g) On appelle A,B, C et D les points de coordonnées respectives $(-1; 1)$; $(1; 1)$; $(1; -1)$ et $(-1; -1)$.

   — Montrer que si $–1 < a < 1$ alors C_u et C_v ne passent pas dans le carré $ABCD$.
   — Montrer que si $a > 1$ ou $a < -1$, $C_u \bigcup C_v$ n'a qu'un seul point dans la bande $–1 < z < 1$

   (h) Démontrer que F la restriction de f à $]–1; 1[$ est une application bijective de $]–1; 1[$ sur $\mathbb{R}$
   (i) Démontrer que l'application F^{-1} est impaire.
   (j) Déterminer l'application composée $F^{-1}\ o\ f$. Vous préciserez pour cela :
   — l'ensemble de définition de $F^{-1}\ o\ f$,
   — l'ensemble des valeurs de $F^{-1}\ o\ f$
   — l'expression de $(F^{-1}\ o\ f)(a)$ en fonction de a et de sa position par rapport à –1 et à 1.
   (k) Dessiner alors la courbe de $F^{-1}\ o\ f$ dans un repère orthonormé R_2