Les fonctions hyperboliques inverses

Christian CYRILLE

"Il ne s'agit ni de rire, ni de pleurer mais de comprendre"
Spinoza

1 Introduction

Vincenzo Riccati est un mathématicien italien jésuite né en 1707 à Castelfranco Veneto et mort en 1775 à Trévise . Il est le fils du mathématicien et physicien Jacopo Riccati dont il a publié et prolongé les œuvres. Il est particulièrement connu pour son travail sur les équations différentielles (équation de Riccati) et sa méthode de résolution par tractoire.Il est aussi le père des fonctions hyperboliques (cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique).

2 Un petit problème à résoudre

Soient c et s deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient les 3 propriétés suivantes :

— P_1 : $\forall x \in \mathbb{R}\ (c(x))^2 - (s(x))^2 = 1$
— P_2 : $\forall x \in \mathbb{R}\ \ c(x) = s'(x)$
— P_3 : $c(0) = 1$

1. Supposons $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $c(x) = 0$. mais alors comme $(c(x))^2 - (s(x))^2 = 1$ alors $(0)^2 - (s(x))^2 = 1$ donc $(s(x))^2 = -1$ impossible.
   Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}\ c(x) \neq 0$
2. Comme $\forall x \in \mathbb{R}\ (c(x))^2 - (s(x))^2 = 1$ et que $c(0) = 1$
   alors $(c(0))^2 - (s(0))^2 = 1$ donc $1 - (s(0))^2 = 1$. On en déduit que $s(0)^2 = 0$ donc $s(0) = 0$
3. En dérivant chaque membre de P_1 par rapport à la variable x , on obtient $2c'(x)c(x) - 2s'(x)s(x) = 0$.
   Or $c(x) = s'(x)$ donc $2c'(x)c(x) - 2c(x)s(x) = 0$.
   Par conséquent $2c(x)(c'(x) - s(x)) = 0$ or $\forall x \in \mathbb{R}\ c(x) \neq 0$ donc
   $\forall x \in \mathbb{R}\ c'(x) = s(x)$
4. On pose $u = c + s$ et $v = c - s$
   (a) $u(0) = c(0) + s(0) = 1 + 0 = 1$ et $v(0) = c(0) - s(0) = 1 - 0 = 1$
   (b) $u'(x) = c'(x) + s'(x) = s(x) + c(x) = u(x)$ donc $u' = u$
   $v'(x) = c'(x) - s'(x) = s(x) - c(x) = -v(x)$ donc $v' = -v$

(c) u est une solution de l'équation différentielle $u' = u$ donc $\exists k \in \mathbb{R}$ $u(x) = Ke^x$. Or $u(0) = 1$ donc $1 = Ke^0$ d'où $k = 1$. Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $u(x) = e^x$
v est une solution de l'équation différentielle $v' = -v$ donc $\exists k \in \mathbb{R}$ $v(x) = Ke^{-x}$. Or $v(0) = 1$ donc $1 = Ke^0$ d'où $k = 1$. Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $v(x) = e^{-x}$

(d) Comme $u = c + s$ et $v = c - s$ alors $c(x) = \dfrac{u(x) + v(x)}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $s(x) = \dfrac{u(x) - v(x)}{2} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

3 2 courbes particulières

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}e^x$ et $g(x) = \dfrac{1}{2}e^{-x}$.

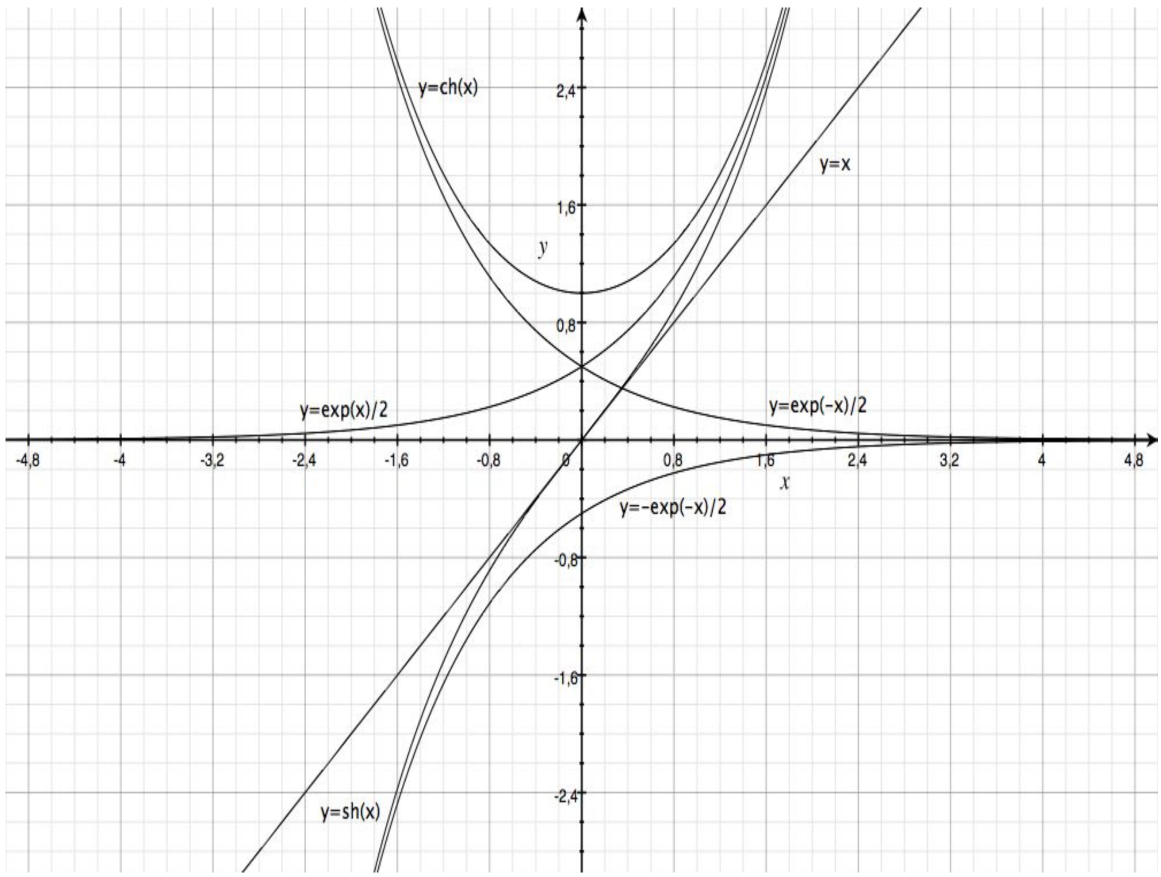
3.1 Etude de la fonction sh

Soit la fonction sinus hyperbolique sh définie sur $\mathbb{R}$ par $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

1. $D_{sh} = \mathbb{R}$ donc $\forall x \in D_{sh}$ on a $-x \in D_{sh}$. Alors $sh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -sh(x)$ donc sh est impaire
2. Comme la courbe de sh admet O comme centre de symétrie, il suffit d'étudier sh sur $\mathbb{R}^+$.
sh est la différence de f et de g qui sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^+$.
$\forall x \in \mathbb{R}^+$ $sh'(x) = ch(x) > 0$ donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
on a $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} sh(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^{-x} = 0$
On en déduit le tableau de variations suivant en utilisant la symétrie de la courbe de sh :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Comme $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} sh(x) - f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} -\dfrac{e^{-x}}{2} = 0$ alors la courbe représentative C_{sh} de sh admet comme asymptote au voisinage de $+\infty$ la courbe C_f
4. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$ l'on a $sh(x) - f(x) = -\dfrac{e^{-x}}{2} < 0$ alors C_{sh} est en dessous de C_f
5. Posons $k(x) = -\dfrac{e^{-x}}{2}$. Comme $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} sh(x) - k(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \dfrac{e^x}{2} = 0$ alors la courbe représentative C_{sh} de sh admet comme asymptote au voisinage de $-\infty$ la courbe C_k
6. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$ l'on a $sh(x) - k(x) = \dfrac{e^x}{2} > 0$ alors C_{sh} est au dessus de C_f


y=ch(x)
y=x
y=exp(x)/2
y=exp(-x)/2
y=-exp(-x)/2
y=sh(x)
y
x
2,4
1,6
0,8
-0,8
-1,6
-2,4
-4,8
-4
-3,2
-2,4
-1,6
-0,8
0
0,8
1,6
2,4
3,2
4
4,8

7. La tangente en 0 à C_{sh} est la droite d'équation $y = sh'(0)(x-0) + sh(0)$ c'est-à-dire d'équation $y = x$.

4 Etude de la fonction ch

Soit la fonction cosinus hyperbolique ch définie sur $\mathbb{R}$ par $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

1. $D_{ch} = \mathbb{R}$ donc $\forall x \in D_{ch}$ on a $-x \in D_{ch}$. Alors , $ch(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = ch(x)$ donc ch est paire
2. Comme la courbe de ch admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, il suffit d'étudier ch sur $\mathbb{R}^+$.
   ch est la somme de f et de g qui sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ donc ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^+$.
   $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $ch'(x) = sh(x) \geq 0$. $ch'(x)$ ne s'annule qu'en 0 alors ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
   on a $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} ch(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^{-x} = 0$
   On en déduit le tableau de variations suivant en utilisant la symétrie de la courbe de ch :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3. Comme $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} ch(x) - f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{e^{-x}}{2} = 0$ alors la courbe représentative C_{ch} de ch admet comme asymptote au voisinage de $+\infty$ la courbe C_f
4. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$ l'on a $ch(x) - f(x) = \dfrac{e^{-x}}{2} > 0$ alors C_{ch} est au dessus de C_f
5. Comme $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} ch(x) - g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \dfrac{e^x}{2} = 0$ alors la courbe représentative C_{sh} de sh admet comme asymptote au voisinage de $-\infty$ la courbe C_g
6. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$ l'on a $ch(x) - g(x) = \dfrac{e^x}{2} > 0$ alors C_{ch} est au dessus de C_g
7. La tangente en 0 à C_{ch} est la droite d'équation $y = ch'(0)(x-0) + ch(0)$ c'est-à-dire d'équation $y = 1$.

5 Quelques propriétés

1. Démontrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a $ch(x) \sim \dfrac{1}{2}e^x$ et $sh(x) \sim \dfrac{1}{2}e^x$
2. Démontrer qu'au voisinage de $-\infty$ on a $ch(x) \sim \dfrac{1}{2}e^{-x}$ et $sh(x) \sim -\dfrac{1}{2}e^{-x}$
3. Démontrer la formule suivante pour tout réel a l'on a :

$$ch^2(a) - sh^2(a) = 1$$

6 Etude la fonction th

Soit la fonction tangente hyperbolique th définie sur $\mathbb{R}$ par $th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$

1. th est le quotient de sh et de ch qui ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ donc $D_{th} = \mathbb{R}$.
   $\forall x \in D_{th} = \mathbb{R}$ on a $-x \in D_{th}$ et $th(-x) = \dfrac{sh(-x)}{ch(-x)} = \dfrac{-sh(x)}{ch(x)} = th(x)$ donc th est impaire. Sa courbe admet donc O comme centre de symétrie.
   Comme sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec en plus ch qui ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ alors th est dérivable sur $\mathbb{R}$.

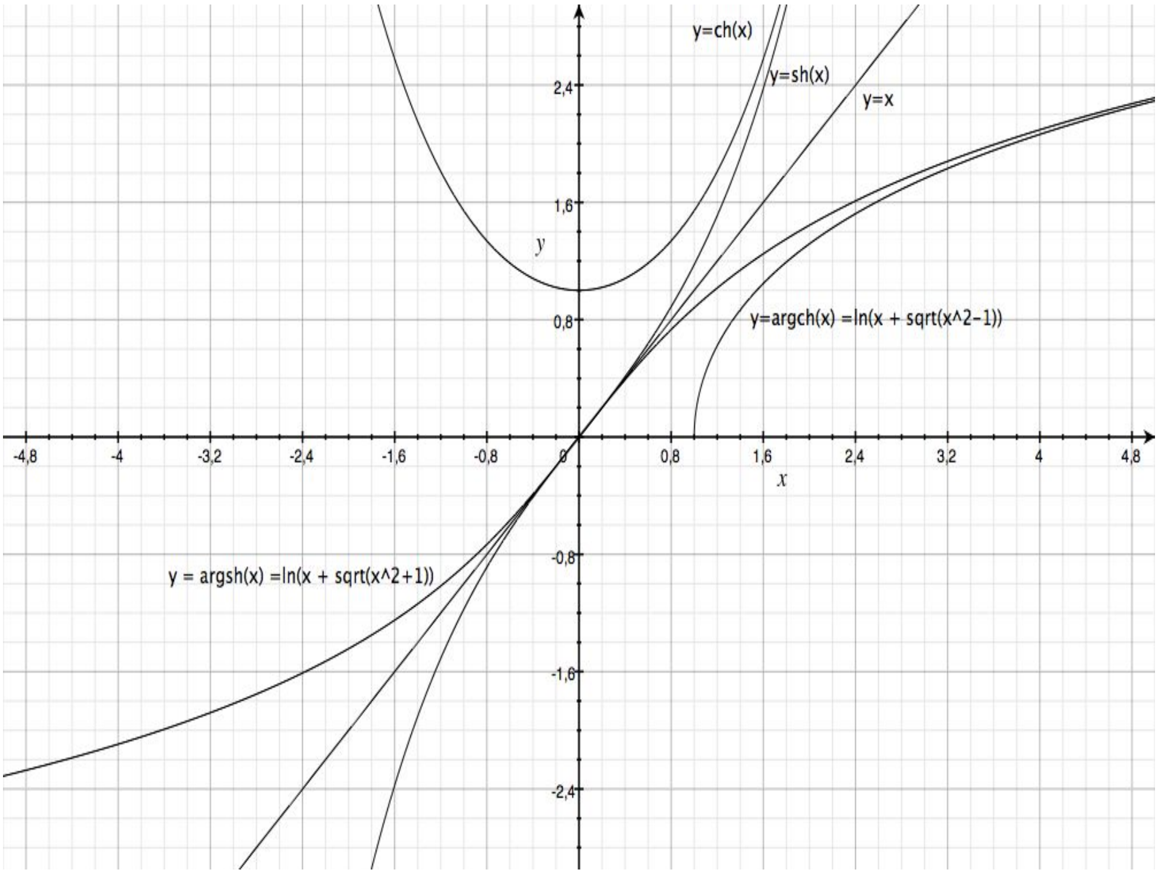
   $\forall x \in \mathbb{R}$ $th'(x) = \dfrac{ch(x)ch(x) - sh(x)sh(x)}{ch^2(x)} = \dfrac{1}{ch^2(x)} > 0$ donc th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ on a $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} th(x) = 1$ car $th(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{e^{2x}(1 - \frac{1}{e^{2x}})}{e^{2x}(1 + \frac{1}{e^{2x}})} = \dfrac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{1}{e^{2x}} = 0$
   On en déduit le tableau de variations suivant en utilisant la symétrie de la courbe de th :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$th'(x)$		$+$		$+$	
$th(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$

7 Fonctions hyperboliques inverses

1. Comme la restriction de ch à $\mathbb{R}^+$ y est continue et strictement croissante alors elle réalise une application bijective de $\mathbb{R}^+$ sur l'intervalle $J = [1; +\infty[$. On appelle argument cosinus hyperbolique que l'on notera $argch$ sa bijection réciproque.
2. les courbes représentatives de la restriction de la fonction ch à $\mathbb{R}^+$ et de $argch$ sont symétriques par raport à la droite d'équation $y = x$. Comme 1 a pour antécédent 0, comme la tangente au point d'abscisse 0 de C_{ch} a pour équation $y = 1$ alors la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe de $argch$ a pour équation $x = 1$. Cette tangente est verticale et $Argch$ n'est pas dérivable en 1
3. Soit $y \in [1; +\infty[$ alors
   $ch(ln(y+\sqrt{y^2-1})) = \dfrac{1}{2}(exp(ln(y+\sqrt{y^2-1}))+exp(-ln(y+\sqrt{y^2-1})))$
   $= \dfrac{1}{2}((y + \sqrt{y^2-1}) + exp(ln(\dfrac{1}{y+\sqrt{y^2-1}})))$
   $= \dfrac{1}{2}((y + \sqrt{y^2-1}) + (\dfrac{1}{y+\sqrt{y^2-1}})) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{(y+\sqrt{y^2-1})^2+1}{y+\sqrt{y^2-1}}))$
   $= \dfrac{1}{2}(\dfrac{(y^2+y^2-1+2y\sqrt{y^2-1}+1}{y+\sqrt{y^2-1}})) = y$ donc $ln(y + \sqrt{y^2-1})$ est l'antécédent de y par ch donc $argch(y) = ln(y + \sqrt{y^2-1})$

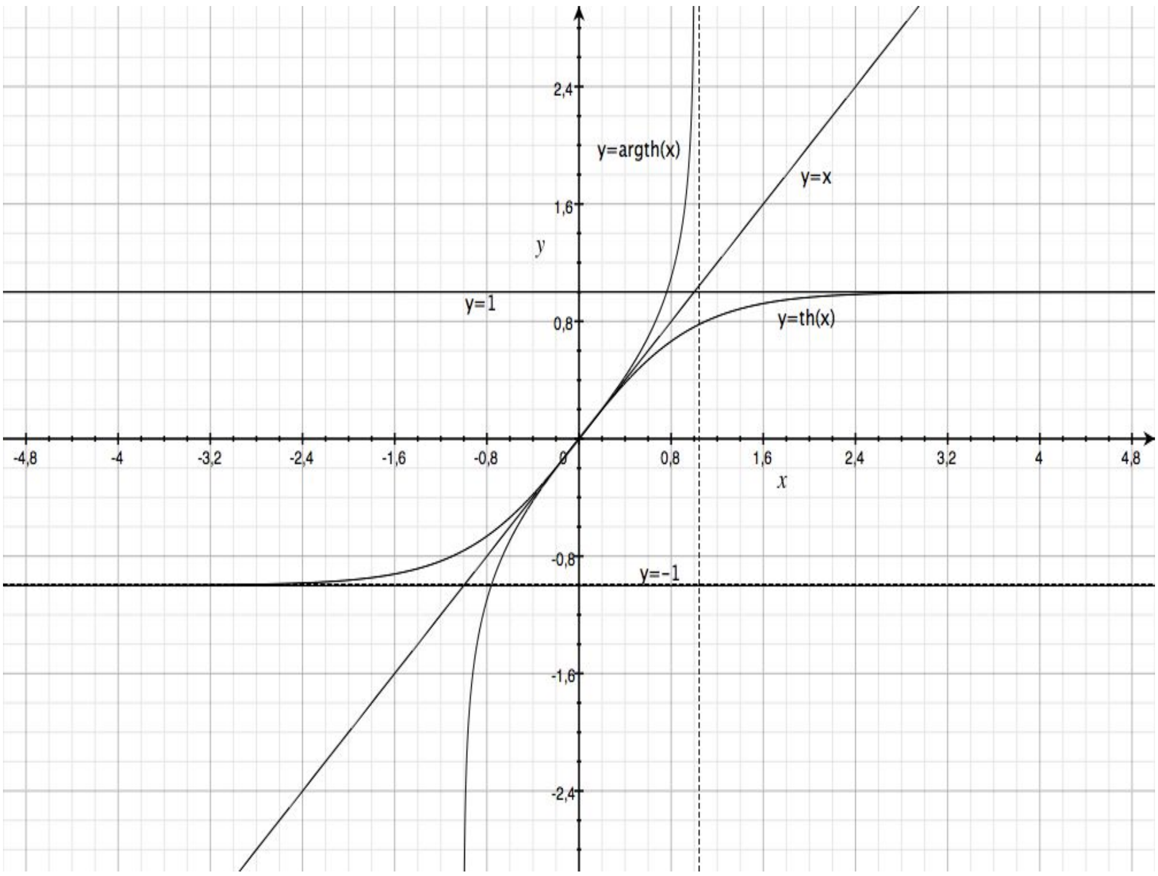
4. Comme $ch' = sh$ ne s'annule jamais sur $]0;+\infty[$ alors $argch$ est dérivable sur $]1;+\infty[$. Alors $(argch)'(y) = ln'(y+\sqrt{y^2-1}) = \dfrac{1+\dfrac{2y}{2\sqrt{y^2-1}}}{y+\sqrt{y^2-1}}$
$= \dfrac{\sqrt{y^2-1}+y}{(y+\sqrt{y^2-1})(\sqrt{y^2-1})} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$
5. Comme sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors elle réalise une application bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On appelle argument sinus hyperbolique que l'on notera $argsh$ sa bijection réciproque.
6. les courbes représentatives de sh et de $argsh$ sont symétriques par raport à la droite d'équation $y = x$. Comme 0 a pour antécédent 0, comme la tangente au point d'abscisse 0 de C_{ch} a pour équation $y = x$ alors la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe de $argsh$ a pour équation $y = x$.
7. Soit $y \in \mathbb{R}$ alors
$sh(ln(y+\sqrt{y^2+1})) = \frac{1}{2}(exp(ln(y+\sqrt{y^2+1}))-exp(-ln(y+\sqrt{y^2+1})))$
$= \frac{1}{2}((y+\sqrt{y^2+1}) - exp(ln(\frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}})))$
$= \frac{1}{2}((y+\sqrt{y^2+1}) - (\frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}})) = \frac{1}{2}(\frac{(y+\sqrt{y^2+1})^2-1}{y+\sqrt{y^2+1}}))$
$= \frac{1}{2}(\frac{(y^2+y^2+1+2y\sqrt{y^2+1}-1}{y+\sqrt{y^2+1}})) = y$ donc $ln(y+\sqrt{y^2+1})$ est l'antécédent de y par ch donc $argch(y) = ln(y+\sqrt{y^2+1})$
8. Comme $sh' = ch$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ alors $argsh$ est dérivable sur$\mathbb{R}$.
Alors $(argsh)'(y) = ln'(y+\sqrt{y^2+1}) = \dfrac{1+\dfrac{2y}{2\sqrt{y^2+1}}}{y+\sqrt{y^2+1}}$
$= \dfrac{\sqrt{y^2+1}+y}{(y+\sqrt{y^2+1})(\sqrt{y^2+1})} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2+1}}$


y=ch(x)
y=sh(x)
y=x
y=argch(x) =ln(x + sqrt(x^2-1))
y = argsh(x) =ln(x + sqrt(x^2+1))
y
x
2,4
1,6
0,8
-0,8
-1,6
-2,4
-4,8
-4
-3,2
-2,4
-1,6
-0,8
0
0,8
1,6
2,4
3,2
4
4,8

9. Comme th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, comme $\lim_{x \mapsto -\infty} th(x) = 1$ et $\lim_{x \mapsto +\infty} th(x) = 1$ alors la fonction th est une application bijective de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]-1;1[$ .On appellera argument tangente hyperbolique que l'on notera $argth$ la bijection réciproque de la fonction th

10. On démontre que pour tout $y \in]-1;1[$ l'on a $th(\frac{1}{2}ln(\frac{1+y}{1-y}) = y$ donc $argth(y) = \frac{1}{2}ln(\frac{1+y}{1-y})$

11. $argth$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car th' ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.
$(argth)'(y) = (\frac{1}{2}ln(\frac{1+y}{1-y}))' = \frac{1}{1-y^2}$



8 Encore quelques propriétés

On démontre les formules suivantes pour tous réels a et b l'on a :

1. $ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b)$
2. $sh(a+b) = sh(a)ch(b) + sh(b)ch(a)$
3. $th(a+b) = \dfrac{th(a)+th(b)}{1+th(a)th(b)}$

On en déduit les formules de multiplication des arcs :
$ch(2a) = ch(a+a) = ch^2(a) + sh^2(a) = 2ch^2(a) - 1 = 1 + 2sh^2(a)$ car $ch^2(a) - sh^2(a) = 1$

$sh(2a) = 2sh(a)ch(a)$ et $th(2a) = \dfrac{2th(a))}{1+th^2(a)}$

Démontrer alors que $ch(x) = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$; $sh(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$ et $th(x)\dfrac{2t}{1+t^2}$ où le paramètre $t = th(\dfrac{x}{2})$

9 Quelques minorations, majorations et encadrements

1. La fonction $x \mapsto sh(x) - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $x \mapsto ch(x) - 1$. Par conséquent comme $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $1 \leq ch(x)$ alors la dérivée est positive donc la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^+$. Or elle vaut 0 en $x = 0$ donc pour tout réel $x \geq 0$, on a : $sh(x) - x \geq 0$ donc $\boxed{x \leq sh(x)}$

2. (a) soit $m(x) = ch(x) - (1 + \dfrac{x^2}{2})$ Alors $m'(x) = sh(x) - x$ donc pour tout réel $x \geq 0$ l'on a $m'(x) \geq 0$. Donc m est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $m(0) = 0$. Donc pour tout réel $x \geq 0$ on a $m(x) \geq 0$ donc pour tout réel $x \geq 0$ on a $\boxed{1 + \dfrac{x^2}{2} \leq ch(x)}$.

   (b) soit $n(x) = sh(x) - (x + \dfrac{x^3}{6})$ Alors $n'(x) = ch(x) - 1 - \dfrac{x^2}{2}$ donc pour tout réel $x \geq 0$ l'on a $n'(x) \geq 0$ d'après la question précédente. Donc n est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $n(0) = 0$. Donc pour tout réel $x \geq 0$ on a $n(x) \geq 0$ donc $\boxed{x + \dfrac{x^3}{6} \leq sh(x)}$

3. Sur $[0;1]$ on a :

   (a) la fonction p définie par $p(x) = 2x - sh(x)$ qui est dérivable et qui a pour nombre dérivé $2 - ch(x)$.
   Or $\forall x \in [0;1]$ on a : $1 \leq ch(x) \leq ch(1) \approx 1,54$ donc $\forall x \in [0;1]$ on a : $2 - ch(x) > 0$. La fonction p est donc croissante sur $[0;1]$ et par conséquent $p(x) \geq p(0)$ avec $p(0) = 0$ donc $2x \geq sh(x)$ donc $\boxed{sh(x) \leq 2x}$.

   (b) la fonction q définie par $q(x) = 1 + x^2 - ch(x)$ qui est dérivable et qui a pour nombre dérivé $2x - sh(x)$.

Or $\forall x \in [0;1]$ on a : $2x \geq sh(x)$ donc $\forall x \in [0;1]$ on a : $q'(x) \geq 0$. La fonction q est donc croissante sur $[0;1]$ et par conséquent $q(x) \geq q(0)$ avec $q(0) = 0$ donc $1 + x^2 - ch(x) \geq 0$ donc $\boxed{ch(x) \leq 1 + x^2}$

4. (a) Soit la fonction r définie par $r(x) = x + \dfrac{x^3}{3} - sh(x)$. Alors r est dérivable sur $[0;1]$ de nombre dérivé $r'(x) = 1 + x^2 - ch(x) \geq 0$ donc r est croissante sur $[0;1]$ donc $r(x) \geq r(0)$. Or $r(0) = 0$ donc $\boxed{sh(x) \leq x + \dfrac{x^3}{3}}$

   (b) Soit la fonction s définie par $s(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{12} - ch(x)$. Alors s est dérivable sur $[0;1]$ de nombre dérivé $s'(x) = x + \dfrac{x^3}{3} - sh(x) \geq 0$ donc s est croissante sur $[0;1]$ donc $s(x) \geq s(0)$. Or $s(0) = 0$ donc $\boxed{ch(x) \leq 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{12}}$

5. Comme, $\forall x \in [0;1]$, $ch(x) \leq 1 + x^2$ et $ch(x) \leq 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{12}$ alors

$$\boxed{0 \leq ch(x) - (1 + \frac{x^2}{2}) \leq \frac{x^4}{12} \leq \frac{1}{12}}$$

Comme, pour tout réel x compris entre 0 et 1, $x + \dfrac{x^3}{6} \leq sh(x)$ et $sh(x) \leq x + \dfrac{x^3}{3}$ alors $0 \leq sh(x) - (x + \dfrac{x^3}{6}) \leq \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^3}{6}$ donc

$$\boxed{0 \leq sh(x) - (x + \frac{x^3}{6}) \leq \frac{x^3}{6} \leq \frac{1}{6}}$$

10 Etude d'une suite pour terminer

$$Soit\ la\ fonction\ F\ definie\ sur\ \mathbb{R}\ par\ F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{sh(x)}\ si\ x \neq 0 \\ 1\ si\ x = 0 \end{cases}$$

1. — étape 1 : $D_F = \mathbb{R}$ est centré en 0 c'est-à-dire $\forall x \in D_F$ on a $-x \in D_F$
   — étape 2 : ou bien $x = 0$ alors $F(-0) = F(0)$
   ou bien $x \neq 0$ alors $F(-x) = \dfrac{-x}{sh(-x)} = \dfrac{-x}{-sh(x)} = \dfrac{x}{sh(x)} = F(x)$
   — Conclusion : $\forall x \in D_F$ on a $-x \in D_F$ et $F(-x) = F(x)$ donc F est paire. La courbe représentative de F admettra l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
2. Pour prouver que la fonction F est continue en 0, nous allons démontrer que $\lim\limits_{x \mapsto 0} F(x) = F(0) = 1$ Comme sh est de classe C^{∞} alors sh admet un développement limité d'ordre 3 au voisinage de tout réel x donc au

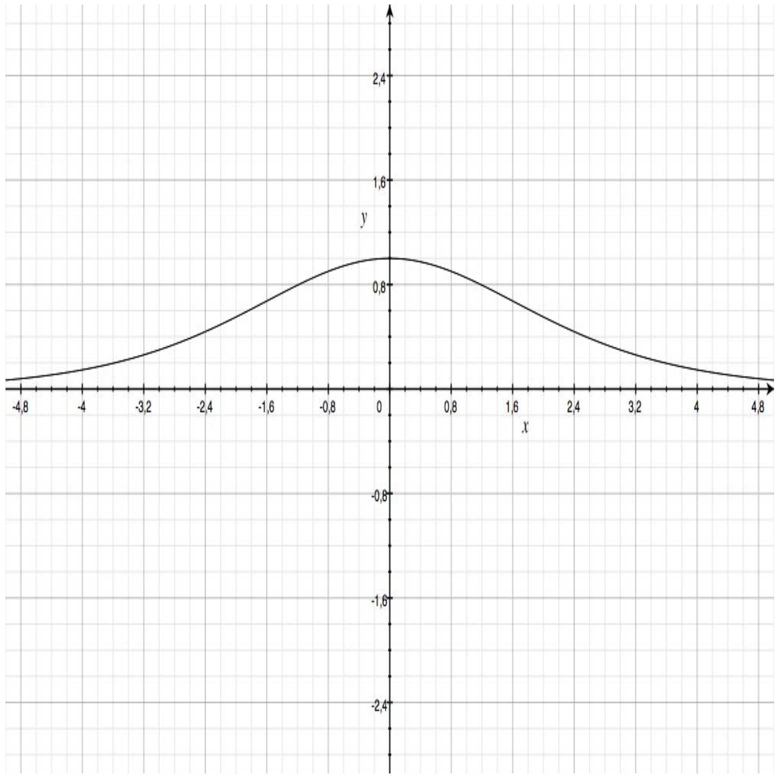
voisinage de 0.
Par conséquent, pour tout x non nul et proche de 0 on a :
$sh(x) = sh(0) + \frac{x}{1!}sh'(0) + \frac{x^2}{2!}sh"(0) + \frac{x^3}{3!}sh^{(3)}(0) + x^3\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \mapsto 0} \epsilon(x) = 0$
donc $sh(x) = 0 + \frac{x}{1}ch(0) + \frac{x^2}{2}sh(0) + \frac{x^3}{6}ch(0) = x + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \mapsto 0} \epsilon(x) = 0$
Donc $F(x) = \frac{x}{sh(x)} = \frac{x}{x + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + x^2\epsilon(x)}$
Alors comme $\lim_{x \mapsto 0} \epsilon(x) = 0$ on a $\lim_{x \mapsto 0} F(x) = 1 = F(0)$. CQFD.

3. Pour tout x non nul et proche de 0 on a :
$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{sh(x)} - 1}{x} = \frac{x - sh(x)}{xsh(x)} = \frac{x - (x + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x))}{x(x + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x))}$$
$$= \frac{x^3(-\frac{1}{6} - \epsilon(x))}{x^2(1 + \frac{x}{6} + x\epsilon(x))} = \frac{x(-\frac{1}{6} - \epsilon(x))}{1 + \frac{x}{6} + x\epsilon(x)}$$
Par conséquent $\lim_{x \mapsto 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 0$ donc la fonction F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$

4. F est le quotient de Id et de sh. Or Id est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^*$ ainsi que sh avec en plus sh qui ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^*$ donc F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
$\forall x \neq 0$ on a $F'(x) = \frac{1(sh(x) - xch(x)}{sh^2(x)} = \frac{H(x)}{sh^2(x)}$ en posant $H(x) = sh(x) - xch(x)$

5. Id est dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que ch donc $x \mapsto xch(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus sh est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc H qui est la différence des fonctions sh et $x \mapsto xch(x)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$ on a $H'(x) = ch(x) - (1ch(x) + xsh(x)) = -xsh(x)$.
x et $sh(x)$ ont même signe donc $H'(x) < 0$ sauf en 0 où $H'(x) = 0$ par conséquent H est décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme $H(0) = 0$ alors si $x < 0$ on a $H(x) > 0$; si $x = 0$ alors $H(x) = 0$ et si $x > 0$ on a $H(x) < 0$

6. Comme le signe de $F'(x)$ est celui de $H(x)$, on peut en conclure que sur $]-\infty; 0[$ F est croissante ; sur $]0; +\infty[$ F est décroissante avec un point maximum pour la courbe de F celui de coordonnées $(0; 1)$ car $F(0) = 1$



7.
$$Soit\ la\ suite\ (u_n)\ definie\ par\ \begin{cases} u_{n+1} = F(u_n)\ si\ n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

(a) F est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $[0,8;1]$ donc $F < [0.8;1] >= [F(1); F(0,8)] \subset [0.8;1]$ car $F(0,8) \approx 0,85$ et $F(1) \approx 0,9$.
Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ l'on a $u_n \in I = [0.8;1]$.

i. étape 1 : $u_0 = 1$ donc $u_0 \in I$

ii. étape 2 : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_k \in I$ mais alors comme $F < I > \subset I$ alors $f(u_k) \in I$ donc $u_{k+1} \in I$

iii. Comme la propriété est initialisée en 0 et héréditaire alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \in I = [0.8;1]$

(b) $F(0) = 1 \neq 0$ donc $x = 0$ n'est pas solution de l'équation $F(x) = x$.
Nous allons donc résoudre cette dernière dans R^* :
$F(x) = x \iff \dfrac{x}{sh(x)} = x \iff x = xsh(x) \iff x - xsh(x) = 0 \iff x(1 - sh(x)) = 0 \iff sh(x) = 1$ car $x \neq 0$.
Or sh est une application bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ de bijection réciproque $argsh$.
Donc $F(x) = x \iff x = Argsh(1)$.
$\alpha = Arg(1)$ est donc la solution unique de l'équation $F(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Comme $sh(0,8) \approx 0,89$ et que $sh(1) \approx 1,18$ et que $0,89 \leq 1 \leq 1,18$ alors $0,8 \leq \alpha \leq 1$.
Soit $0,8 \leq x \leq 1$ donc comme H est décroissante sur $[0.8;1]$ alors

$\boxed{H(1) \leq H(x) \leq H(0,8)}$
Comme sh est croissante sur $[0.8;1]$ alors
$0 \leq sh(0,8) \leq sh(x) \leq sh(1)$ donc $0 \leq sh^2(0,8) \leq sh^2(x) \leq sh^2(1)$
donc $0 < \dfrac{1}{sh^2(1)} \leq \dfrac{1}{sh^2(x)} \leq \dfrac{1}{sh^2(0,8)}$.
mais $H(1) \leq H(x) \leq H(0,8) \leq 0$ donc $-H(1) \geq -H(x) \geq -H(0,8) \geq 0$ d'où $-H(0,8) \leq -H(x) \leq -H(1) \leq 0$
donc $\dfrac{-H(0,8)}{sh^2(1)} \leq \dfrac{-H(x)}{sh^2(x)} \leq \dfrac{-H(1)}{sh^2(0,8)}$
d'où $\dfrac{H(0,8)}{sh^2(1)} \geq \dfrac{H(x)}{sh^2(x)} \geq \dfrac{H(1)}{sh^2(0,8)}$ Par conséquent, $\forall x \in [0.8;1]$
$\boxed{\dfrac{H(1)}{sh^2(0.8} \leq F'(x) \leq \dfrac{H(0.8)}{sh^2(1)}}$

(d) Or $\dfrac{H(1)}{sh^2(0.8} \approx -0,47$ et $\dfrac{H(0.8)}{sh^2(1)} \approx -0,13$ donc $-0,5 \leq F'(x) \leq 0$ donc $|F'(x)| \leq 0,5$.
Comme F est continue sur $[0,8;1]$, comme F est dérivable sur $[0,8;1]$, comme $\forall x \in [0,8;1]$ on a $|F'(x)| \leq 0,5$ comme $\forall n \in \mathbb{N}$ l'on a $u_n \in [0.8;1]$, comme $\alpha \in [0.8;1]$ alors d'après l'inégalité des acroissements finis,
$\forall n \in \mathbb{N}$ on a $|F(u_n) - F(\alpha)| \leq 0.5|u_n - \alpha|$
donc $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n+1} - \alpha| =\leq 0.5|u_n - \alpha|$
Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n - \alpha| \leq 0.2(0.5)^n$

i. étape 1 : la distance entre u_0 et α qui est $|u_0 - \alpha|$ est inférieure à 1 car $u_0 \in [0.8;1]$ et $\alpha \in [0.8;1]$ donc $|u_0 - \alpha| \leq 0.2(0.5)^0$
ii. étape 2 : soit $k \in \mathbb{N}$. Si l'on suppose que $|u_k - \alpha| \leq 0.2(0.5)^k$. Comme $|u_{k+1}-\alpha| =\leq 0.5|u_k-\alpha|$ alors $|u_{k+1}-\alpha| =\leq 0.5(0.2(0.5)^k)$ donc $|u_{k+1} - \alpha| \leq 0.2(0.5)^{k+1}$
iii. Conclusion, d'après les étapes 1 et 2 on peut conclure que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq |u_n - \alpha| \leq 0.2(0.5)^n$

(e) Comme $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 0.2(0.5)^n = 0$ car $-1 < 0,5 < 1$ alors d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n - \alpha = 0$. Alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \alpha$