Christian CYRILLE

Les fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

"Il ne s'agit ni de rire, ni de pleurer mais de comprendre"
Spinoza

1 Les fonctions hyperboliques

Vincenzo Riccati est un mathématicien italien jésuite né en 1707 à Castelfranco Veneto et mort en 1775 à Trévise . Il est le fils du mathématicien et physicien Jacopo Riccati dont il a publié et prolongé les œuvres. Il est particulièrement connu pour son travail sur les équations différentielles (équation de Riccati) et sa méthode de résolution par tractoire.Il est aussi le père des fonctions hyperboliques (cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique).

1.1 Un petit problème à résoudre

Soient c et s deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient les 3 propriétés suivantes :

— P_1 : $\forall x \in \mathbb{R}\ (c(x))^2 - (s(x))^2 = 1$
— P_2 : $\forall x \in \mathbb{R}\ \ c(x) = s'(x)$
— P_3 : $c(0) = 1$

1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}\ c(x) \neq 0$
2. Calculer $s(0)$
3. En dérivant chaque membre de P_1 démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}\ s(x) = c'(x)$
4. On pose $u = c + s$ et $v = c - s$
   (a) Calculer $u(0)$ et $v(0)$
   (b) Démontrer que $u' = u$ et que $v' = -v$
   (c) Déterminer les fonctions u et v
   (d) En déduire les expressions de $c(x)$ et de $s(x)$

1.2 2 courbes particulières

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}e^x$ et $g(x) = \dfrac{1}{2}e^{-x}$.

1. Dans le repère orthonormé $R_1 = (0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec une unité graphique de 2 cm, dessiner avec 2 couleurs différentes les courbes représentatives C_f et C_g de f et de g sans procéder à l'étude de ces 2 fonctions.
2. Préciser sur chacune de ces 2 courbes les points d'abscisse 0 et 1.

1.3 Etude de la fonction sh

Soit la fonction sinus hyperbolique sh définie sur $\mathbb{R}$ par $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

1. Démontrer que sh est impaire
2. Etudier les variations de sh puis dresser le tableau de variations de sh
3. Démontrer que la courbe représentative C_{sh} de sh admet comme asymptote au voisinage de $+\infty$ la courbe C_f
4. Etudier la position relative des courbes C_{sh} et C_f
5. Démontrer que la courbe représentative C_{sh} de sh admet comme asymptote au voisinage de $-\infty$ la courbe C_k d'une fonction k que l'on précisera.
6. Etudier la position relative des courbes C_{sh} et C_k
7. Ajouter dans le repère orthonormé $R_1 = (0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ le dessin des courbes C_{sh} et C_k. Dessiner également la tangente en 0 à C_{sh}.

1.4 Etude de la fonction ch

Soit la fonction cosinus hyperbolique ch définie sur $\mathbb{R}$ par $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

1. Démontrer que ch est paire
2. Etudier les variations de ch puis dresser le tableau de variations de ch
3. Démontrer que la courbe représentative C_{ch} de ch admet comme asymptote au voisinage de $+\infty$ la courbe C_f
4. Etudier la position relative des courbes C_{ch} et C_f
5. Démontrer que la courbe représentative C_{ch} de ch admet comme asymptote au voisinage de $-\infty$ la courbe d'une fonction que l'on précisera.
6. Etudier la position relative de la courbes C_{ch} et de son asymptote au voisinage de $-\infty$
7. Ajouter dans le repère orthonormé $R_1 = (0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ le dessin de la courbes C_{ch}. Dessiner également la tangente en 0 à C_{ch}.

1.5 Quelques propriétés

1. Démontrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a $ch(x) \sim \dfrac{1}{2}e^x$ et $sh(x) \sim \dfrac{1}{2}e^x$
2. Démontrer qu'au voisinage de $-\infty$ on a $ch(x) \sim \dfrac{1}{2}e^{-x}$ et $sh(x) \sim -\dfrac{1}{2}e^{-x}$
3. Démontrer la formule suivante pour tout réel a l'on a :

$$ch^2(a) - sh^2(a) = 1$$

1.6 Etude la fonction th

Soit la fonction tangente hyperbolique th définie sur $\mathbb{R}$ par $th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$

1. Etudier les variations de cette fonction puis dresser son tableau de variations
2. Dessiner la courbe représentative de th dans un repère orthonormé. On précisera la tangente en 0

2 Fonctions hyperboliques inverses

1. Démontrer que la restriction de la fonction ch à $\mathbb{R}^+$ est une application bijective de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle J que l'on précisera. On appellera argument cosinus hyperbolique que l'on notera $argch$ la bijection réciproque de la restriction de la fonction ch à $\mathbb{R}^+$
2. Dessiner dans un nouveau repère orthonormé R_2 les courbes représentatives de la restriction de la fonction ch à $\mathbb{R}^+$ et de $argch$.
   On précisera la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe de $argch$
3. Démontrer que pour tout $y \in J$ l'on a : $argch(y) = ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$
4. Où et pourquoi $argch$ est dérivable ? préciser ensuite $(argch)'(y)$
5. Démontrer que la fonction sh est une application bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle K que l'on précisera. On appellera argument sinus hyperbolique que l'on notera $argsh$ la bijection réciproque de la fonction sh
6. Dessiner dans un nouveau repère R_3 les courbes représentatives de la fonction sh et de $argsh$.
7. Démontrer que pour tout $y \in K$ l'on a : $argsh(y) = ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$
8. Où et pourquoi $argsh$ est dérivable ? préciser ensuite $(argsh)'(y)$
9. Démontrer que la fonction th est une application bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle L que l'on précisera. On appellera argument tangente hyperbolique que l'on notera $argth$ la bijection réciproque de la fonction th
10. Dessiner dans un nouveau repère R_4 les courbes représentatives de la fonction th et de $argth$.
11. Démontrer que pour tout $y \in L$ l'on a : $argth(y) = \frac{1}{2}ln(\frac{1+y}{1-y})$
12. Où et pourquoi $argth$ est dérivable ? préciser ensuite $(argth)'(y)$

3 Encore quelques propriétés

Démontrer les formules suivantes pour tous réels a et b l'on a :

1. $ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b)$
2. $sh(a+b) = sh(a)ch(b) + sh(b)ch(a)$
3. $th(a+b) = \dfrac{th(a) + th(b)}{1 + th(a)th(b)}$

En déduire les formules de multiplication des arcs : $ch(2a)$ (3 formules) ; $sh(2a)$ et $th(2a)$

Démontrer alors que $ch(x) = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$; $sh(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$ et $th(x)\dfrac{2t}{1+t^2}$ où le paramètre $t = th(\frac{x}{2})$

4 Quelques minorations, majorations et encadrements

1. Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $x \leq sh(x)$

2. En déduire les inégalités suivantes pour tout réel $x \geq 0$:
   (a) $1 + \frac{x^2}{2} \leq ch(x)$
   (b) $x + \frac{x^3}{6} \leq sh(x)$
3. Démontrer que pour tout réel x compris entre 0 et 1, on a :
   (a) $sh(x) \leq 2x$
   (b) $ch(x) \leq 1 + x^2$
4. En déduire les inégalités suivantes pour tout réel x compris entre 0 et 1 :
   (a) $sh(x) \leq x + \frac{x^3}{3}$
   (b) $ch(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}$
5. Justifier que , pour tout réel x compris entre 0 et 1, , on a :

$$0 \leq ch(x) - (1 + \frac{x^2}{2}) \leq \frac{1}{12}$$

   Qu'en est-il pour $sh(x)$?

5 Etude d'une suite pour terminer

$$Soit\ la\ fonction\ F\ definie\ sur\ \mathbb{R}\ par\ F(x) = \begin{cases} \frac{x}{sh(x)}\ si\ x \neq 0 \\ 1\ si\ x = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la parité de F
2. Démontrer que la fonction F est continue en 0
3. Démontrer ensuite que la fonction F est dérivable en 0 et déterminer $F'(0)$
4. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ puis calculer $F'(x)$ pour $x \neq 0$
5. On pose $H(x) = sh(x) - xch(x)$ pour $x \geq 0$. Etudier les variations de H puis en déduire le signe de $H(x)$
6. Déterminer les variations de F sur $\mathbb{R}^+$ puis donner l'allure approximative de la courbe représentative de la fonction F dans un nouveau repère.
7. $$Soit\ la\ suite\ (u_n)\ definie\ par\ \begin{cases} u_{n+1} = F(u_n)\ si\ n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$
   (a) Justifier que $F < [0.8; 1] > \subset [0.8; 1]$ puis que $u_n \in [0.8; 1]\ \forall n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que l'équation $F(x) = x$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.
   (c) Donner un encadrement de α.
   Justifier que $\forall x \in [0.8; 1]\ \frac{H(1)}{sh^2(0.8} \leq F'(x) \leq \frac{H(0.8)}{sh^2(1)}$
   (d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0.5|u_n - \alpha|$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0.2(0.5)^n$
   (e) En déduire $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n$