Suite convergeant vers e

17 novembre 2017

1 Problème

Partie 1

On considère f la fonction numérique d'une variable réelle définie par :
$f(x) = x - \ln(x)$

1. Etudier f et résumer cette étude par un tableau de variations.
2. Etudier le signe de $f(x) - x$ pour $x > 0$

Partie 2

On considère l'algorithme suivant :

```
program iter;
var   n , k : integer ;
      a , u , p : real ;
 function f(x : real): real;
      begin
            if x > 0 then f := x - ln(x) ;
      end;
 begin
   (* entrée des données *)
        readln(n);
        readln(a);

   (* traitement *)
       u := a ;
       p := a;
       for k := 1 to n do     begin
                                   u := f(u) ;
                                   p:= p* u;
                               end;

   (* affichage des résultats *)
       writeln(u);
       writeln(p);
 end.
```

Dans le cas particulier où $n = 3$ et $a = 2$

1. Donner les écritures des valeurs exactes des contenus de la variable u à chaque tour de boucle et à la fin de l'algorithme.
2. On donne $2 - \ln(2) \approx 1,306$
   $2 - \ln(2) - \ln(2 - \ln(2)) \approx 1,039$
   $2,612 * 1,039 \approx 2,714$
   $2 - \ln(2) - \ln(2 - \ln(2)) - \ln(2 - \ln(2) - \ln(2 - \ln(2))) \approx 1,00074$
   $2,715 * 1,00074 \approx 2,716$
   Donner les valeurs approchées des contenus successifs de la variable p à chaque tour de boucle et à la fin de l'algorithme. Que peut-on conjecturer pour cette variable p ?

Partie 3

Dorénavant, dans le cas général, on note u_n et p_n les contenus respectifs des variables u et p à la fin de l'algorithme lorsque leur calcul est possible.

1. Pour quelles valeurs de a peut-on définir cette suite (u_n) de premier terme $u_0 = a$ et dont le terme général est calculé par l'algorithme précédent ?
2. Pour les valeurs de a trouvées ci-dessus, donner en fonction de n :
   — le nombre total d'appels de la fonction f utilisée dans l'algorithme
   — le nombre total de soustractions nécessaires aux calculs de u et de p
   — le nombre total de multiplications nécessaires aux calculs de u et de p
   — le nombre total d'affectations nécessaires aux calculs de u et de p. a
   NB - On admettra que le symbole := utilisé dans l'écriture $for\ k := 1\ to\ n$ ne sera pas considéré comme une affectation mais que chaque appel de fonction nécessite une affectation ($f :=$) et une soustraction.
3. Lorsque la suite (u_n) est bien définie, écrire , pour tout entier naturel n, la relation liant u_{n+1} et u_n.
4. Démontrer que si $a = 1$ alors la suite (u_n) est constante.
5. Démontrer que si la suite (u_n) est constante alors $a = 1$
6. On suppose dans cette question que $a > 1$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, l'on a : $u_n > 1$
   (b) Etudier les variations de la suite (u_n)
   (c) En déduire que la suite (u_n) converge puis déterminer sa limite.
7. On suppose dans cette question que $0 < a < 1$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'on a : $u_n > 1$
   (b) Etudier les variations de la suite (u_n) sur $\mathbb{N}^*$
   (c) En déduire que la suite (u_n) converge puis déterminer sa limite.

Partie 4

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $p_n = au_1u_2 \cdots u_n$
2. En considérant $\ln(p_n)$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $p_n = e^{a-u_{n+1}}$
3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$
4. Peut-on alors justifier la conjecture de la question 2 de la partie 2 lorsque a valait 2 ?

5. Ecrire alors un nouvel algorithme en Turbo-Pascal permettant le calcul de p_n.
   Cet algorithme ne doit contenir aucune multiplication.
   On rappelle que la fonction exponentielle notée exp est prédéfini dans le langage TurboPascal.