Stirling

Christian CYRILLE

27 décembre 2017

"Il ne s'agit ni de rire, ni de pleurer mais de comprendre"
Spinoza

1 Les nombres de Stirling

En mathématiques, les nombres de Stirling apparaissent dans plusieurs problèmes combinatoires. Ils tirent leur nom de James Stirling, mathématicien écossais (1692-1770) qui les a introduits au xviiie siècle. Il en existe deux sortes, nommés les nombres de Stirling de première espèce et les nombres de Stirling de seconde espèce.
Soit la suite des polynômes $(P_n(x))$ où $n \in \mathbb{N}$ appelés polynômes factoriels définis de la façon suivante :
Pour tout réel x

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_n(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n+1) \text{ pour } n \text{ non nul} \end{cases}$$

1. Ecrivez chacun des polynômes factoriels suivants $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ et $P_4(x)$ sous deux formes
   — une forme factorisée
   — et une forme développée :
2. Quel est le degré du polynôme $P_n(x)$? Justifier.

1.1 Nombres de STIRLING de première espéce s_n^k

On pose $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} s_n^k x^k$. Ces nombres s_n^k s'appellent les nombres de STIRLING de première espèce.

Attention , ne confondez pas les s_n^k et les coefficients binomiaux C_n^k ou $\binom{n}{k}$

1. Déterminer les nombres suivants
   (a) s_0^0 ;
   (b) s_1^0 ; s_1^1 ;
   (c) s_2^0 ; s_2^1 ; s_2^2 ;
   (d) s_3^0 ; s_3^1 ; s_3^2 ; s_3^3 ;
   (e) s_4^0 ; s_4^1 ; s_4^2 ; s_4^3 ; s_4^4.
   Justifier
2. Que vaut s_n^k lorsque $k > n$? Justifier.
3. Vérifier que pour tout réel x l'on a : $P_{n+1}(x) = (x-n)P_n(x)$
4. En déduire que pour tout entier k compris entre 1 et n l'on a :
   $s_{n+1}^k = s_n^{k-1} - n s_n^k$
5. Recopier puis compléter le tableau suivant où à l'intersection de la ligne n et de la colonne k l'on trouve s_n^k :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=0$							
$n=1$							
$n=2$							
$n=3$							
$n=4$							
$n=5$							

1.2 Nombres de STIRLING de deuxième espèce S_n^k

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $x^n = \sum_{k=0}^{n} S_n^k P_k(x)$.
Ces nombres S_n^k s'appellent les nombres de STIRLING de deuxième espèce.
Attention , ne confondez pas les S_n^k coefficients de Stirling de 2ème espèce et les s_n^k coefficients de Stirling de 1ère espèce.
On rappelle qu'un nombre A est combinaison de nombres $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$ lorsqu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \cdots$ tels que $A = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 + \cdots$

1. Déterminer x^0 comme combinaison linéaire des polynômes $P_0(x)$, $P_1(x)$,$P_2(x)$, $\cdots$
2. Déterminer x^1 comme combinaison linéairedes polynômes $P_0(x)$, $P_1(x)$,$P_2(x)$, $\cdots$
3. Déterminer x^2 comme combinaison linéairedes polynômes $P_0(x)$, $P_1(x)$,$P_2(x)$, $\cdots$
4. Déterminer x^3 comme combinaison linéaire des polynômes $P_0(x)$, $P_1(x)$,$P_2(x)$, $\cdots$
5. Déterminer x^4 comme combinaison linéaire des polynômes $P_0(x)$, $P_1(x)$,$P_2(x)$, $\cdots$
6. Calculer les nombres
   (a) S_0^0 ;
   (b) S_1^0 ; S_1^1 ;
   (c) S_2^0 ; S_2^1 ; S_2^2 ;
   (d) S_3^0 ; S_3^1 ; S_3^2 ; S_3^3 ;
   (e) S_4^0 ; S_4^1 ; S_4^2 ; S_4^3 ; S_4^4.
   Justifier.
7. Que vaut S_n^0 lorsque $n > 0$? Justifier.
8. Que vaut S_n^k lorsque $k > n$? Justifier.
9. Démontrer que pour tout entier k compris entre 1 et $n+1$ l'on a :
   $S_{n+1}^k = S_n^{k-1} + kS_n^k$
10. Recopier puis compléter le tableau suivant où à l'intersection de la ligne n et de la colonne k l'on trouve S_n^k :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=0$							
$n=1$							
$n=2$							
$n=3$							
$n=4$							
$n=5$							

2 Culture générale : Formule de Stirling

Quand n est très grand alors $n! = (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}(1 + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})$