Stirling

Christian CYRILLE

27 décembre 2017

"Il ne s'agit ni de rire, ni de pleurer mais de comprendre"
Spinoza

1 Les nombres de James Stirling, Ecosse (1692-1770)

Soit la suite des polynômes $(P_n(x))$ où $n \in \mathbb{N}$ appelés polynômes factoriels définis de la façon suivante :
Pour tout réel x

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_n(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n+1) \textit{ pour n non nul} \end{cases}$$

1. $P_0(x)$ étant une constante non nulle est de degré 1.
   Si $n \geq 1$, le polynôme $P_n(x)$ est de degré n.
2. $P_1(x) = x$,
   $P_2(x) = x(x-1) = x^2 - x$
   $P_3(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$
   $P_4(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$

1.1 Nombres de STIRLING de première espéce s_n^k

En posant $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} s_n^k x^k$, on sera en présence de deux écritures du même polynôme $P_n(x)$. En procédant par identification des coefficients des monômes respectifs de même degré, on détermine les nombres de STIRLING de première espèce. s_n^k s'appellent les nombres de STIRLING de première espèce.

1. Comme $P_0(x) = 1$ alors $s_0^0 = 1$
   Comme $P_1(x) = x$ alors $s_1^0 = 0$; $s_1^1 = 1$
   Comme $P_2(x) = x(x-1) = x^2 - x$ alors $s_2^0 = 0$; $s_2^1 = -1$; $s_2^2 = 1$;
   Comme $P_3(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$
   alors $s_3^0 = 0$; $s_3^1 = 2$; $s_3^2 = -3$; $s_3^3 = 1$;
   Comme $P_4(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$
   alors $s_4^0 = 0$; $s_4^1 = -6$; $s_4^2 = 11$; $s_4^3 = -6$; $s_4^4 = 1$.
2. Si $k > n$ alors $s_n^k = 0$ car le degré de $P_n(x)$ étant n on en déduit que les coefficients de $x^{n+1}, x^{n+2}\cdots$ sont tous nuls
3. Par définition, pour tout réel x l'on a : $P_{n+1}(x) = (x-n)P_n(x)$

4. Or $P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} s_{n+1}^k x^k = (x-n) \sum_{k=0}^{n} s_n^k x^k$. on identifie alors dans les deux écritures le coefficient de x^k et on en déduit que pour tout entier k compris entre 1 et n l'on a :
$s_{n+1}^k = s_n^{k-1} - n s_n^k$
5. Recopier puis compléter le tableau suivant où à l'intersection de la ligne n et de la colonne k l'on trouve s_n^k :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=0$	1	0	0	0	0	0	0
$n=1$	0	1	0	0	0	0	0
$n=2$	0	-1	1	0	0	0	0
$n=3$	0	2	-3	1	0	0	0
$n=4$	0	-6	11	-6	1	0	0
$n=5$	0	24	-50	35	-10	1	0

1.2 Nombres de STIRLING de deuxième espèce S_n^k

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $x^n = \sum_{k=0}^{n} S_n^k P_k(x)$.

Ces nombres S_n^k s'appellent les nombres de STIRLING de deuxième espèce.

1. $x^0 = 1 = 1P_0(x) + 0P_1(x) + 0P_2(x) + 0P_3(x) + \cdots$
2. $x^1 = x = 0P_0(x) + 1P_1(x) + 0P_2(x) + 0P_3(x) + \cdots$
3. $x^2 = P_1(x) + P_2(x) = 0P_0(x) + 1P_1(x) + 1P_2(x) + 0P_3(x) + \cdots$
4. $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 - 3(P_1(x) + P_2(x)) + 2P_1(x)$
$= x^3 - 3P_2(x) - P_1(x)$ donc $x^3 = 0P_0(x) + 1P_1(x) + 3P_2(x) + 1P_3(x)$
5. $P_4(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$
$= x^4 - 6(P_1(x) + 3P_2(x) + P_3(x)) + 11(P_1(x) + P_2(x)) - 6P_1(x) = x^4 - 6P_3(x) - 7P_2(x)$
donc $x^4 = 0P_0(x) + 1P_1(x) + 7P_2(x) + 6P_3(x) + P_4(x)$
6. Donc $S_0^0 = 1$
$S_1^0 = 0$; $S_1^1 = 1$
$S_2^0 = 0$; $S_2^1 = 1$; $S_2^2 = 1$
$S_3^0 = 0$; $S_3^1 = 1$; $S_3^2 = 3$; $S_3^3 = 1$
$S_4^0 = 0$; $S_4^1 = 1$; $S_4^2 = 7$; $S_4^3 = 6$; $S_4^4 = 1$.
7. Lorsque $n > 0$, $S_n^0 = 0$ car les polynômes $P_n(x)$ n'ont pas de termes constants.
8. Lorsque $k > n$ $S_n^k = 0$ car le polynôme $P_n(x)$ est de degré n donc x^n ne peut d'écrire en fonction de $P_{n+1}, P_{n+2} \cdots$.
9. (a) $x^{n+1} = x(x^n) = x(\sum_{k=0}^{n} S_n^k P_k(x)) = \sum_{k=0}^{n} S_n^k x P_k(x)$

   Or $P_{k+1}(x) = (x-k)P_k = xP_k(x) - kP_k(x)$ donc $x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} S_n^k (kP_k(x) + P_{k+1}(x))$

   (b) Comme la famille $(P_0, P_1, ..., P_{n+1})$ est une famille de $(n+1)$ polynômes de degrés échelonnés de 1 à n alors c'est une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n+1$

Par conséquent, tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $P_0(x)$, $P_1(x)$,$P_2(x)$, $\cdots$ $P_{n+1}(x)$

Comme $x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} S_{n+1}^k P_k(x)$

et que $x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} S_n^k (kP_k(x) + P_{k+1}(x)) = \sum_{k=0}^{n} S_n^k kP_k(x) + \sum_{k=0}^{n} S_n^k P_{k+1}(x)$

On identifie dans chaque membre le coefficient de P_k donc pour tout entier k compris entre 1 et $n+1$ l'on a : $S_{n+1}^k = S_n^{k-1} + kS_n^k$

10. Comme pour tout entier k compris entre 1 et $n+1$ l'on a :
$S_{n+1}^k = S_n^{k-1} + kS_n^k$,on peut créer le tableau suivant où à l'intersection de la ligne n et de la colonne k l'on trouve S_n^k :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=0$	1	0	0	0	0	0	0
$n=1$	0	1	0	0	0	0	0
$n=2$	0	1	1	0	0	0	0
$n=3$	0	1	3	1	0	1	1
$n=4$	0	1	7	6	1	0	0
$n=5$	0	1	15	25	10	1	0