

Rallye Irem Antilles Guyane - Lycées généraux 2018 - Finale - Corrigé

Christian CYRILLE

2 mars 2018

1 "Ma Cocotte" - 3 points

Dans un groupe d'amies, on décide des règles suivantes : Si tu es mon amie, je suis ton amie. Mais tes amies ne sont pas forcément les miennes. Albertine, Blandine, Christine, Didine, Eline et Francine se retrouvent et chacune compte combien d'amies elle a parmi les cinq autres.

- Albertine a exactement 1 amie.
- Blandine a exactement 2 amies.
- Christine a exactement 3 amies.
- Didine a exactement 4 amies.
- Eline a exactement 5 amies.

Combien Francine a-t-elle d'amies dans le groupe ?

1.1 Corrigé

On remplacera les noms des 5 filles par leurs initiales.

Pour résoudre ce problème, nous utiliserons une structure de tableau :

- E a 5 amies : A, B, C, D et F .

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | X | | | | | |
| B | X | X | | | | |
| C | X | X | X | | | |
| D | X | X | X | X | | |
| E | * | * | * | * | X | |
| F | X | | | | * | X |

- A a une seule amie, c'est forcément E .

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | X | | | | | |
| B | X | X | | | | |
| C | X | X | X | | | |
| D | X | X | X | X | | |
| E | * | * | * | * | X | |
| F | X | | | | * | X |

- D a 4 amies : l'une est E , reste à choisir 3 amies parmi A, B, C et F .
Mais on ne peut choisir A donc les amies de D sont : B, C, D, E .

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | X | | | | | |
| B | X | X | | | | |
| C | X | X | X | | | |
| D | X | * | * | X | | |
| E | * | * | * | * | X | |
| F | X | | | * | * | X |

- B a exactement 2 amies : E et D

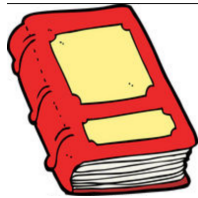
| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | X | | | | | |
| B | X | X | | | | |
| C | X | X | X | | | |
| D | X | * | * | X | | |
| E | * | * | * | * | X | |
| F | X | X | | * | * | X |

- C a exactement 3 amies : l'une est forcément E , la deuxième est D , la troisième ne peut être A , c'est soit F soit B . Or ce ne peut être B car B a exactement 2 amies : E et D .
 C a donc 3 amies : E, D, F .

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | X | | | | | |
| B | X | X | | | | |
| C | X | X | X | | | |
| D | X | * | * | X | | |
| E | * | * | * | * | X | |
| F | X | X | * | * | * | X |

- Par conséquent, F a 3 amies : C, D, E

2 "Les pages du grimoire de Mr Sonson" - 4 points



1392 chiffres ont été divisés pour numéroter consécutivement à partir de la page 1 les pages d'un vieux grimoire que Monsieur Sonson utilise pour ses recettes miraculeuses.

Combien ce livre possède-t-il de pages ?

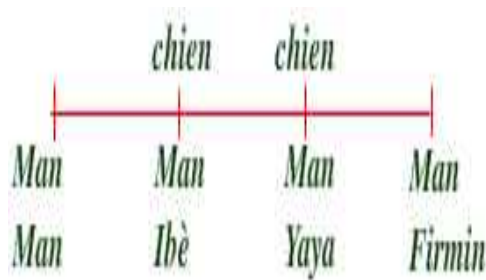
2.1 Corrigé

- De 1, 2, \dots , 9 on utilise 9 chiffres.
- De 10, 11, \dots , 99 il y a 90 nombres de 2 chiffres pour lesquels on utilise $2 \times 90 = 180$ chiffres.
- De 100, 11, \dots , 500 il y a $500 - 99 = 401$ nombres de 3 chiffres pour lesquels on utilise $3 \times 401 = 1203$ chiffres.

$$9 + 180 + 1203 = 1392$$

Le livre de Mr Sonson a donc 500 pages

3 'Yannis a très peur des chiens" - 4 points



Les maisons de Man Man, Man Ibè, Man Yaya et Man Firmin sont régulièrement espacées d'un mètre le long de la rue.

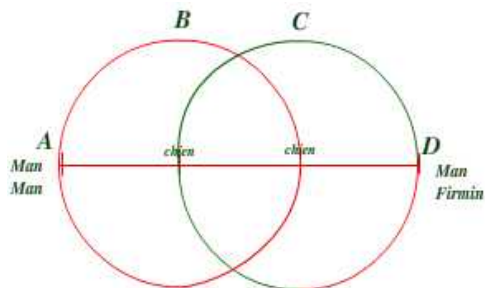
Yannis part de chez sa mère Man Man et doit rejoindre la maison de sa grand-mère Man Firmin.

Mais le petit garçon a très peur des gros chiens de ses voisins Man Ibè et Man Yaya.

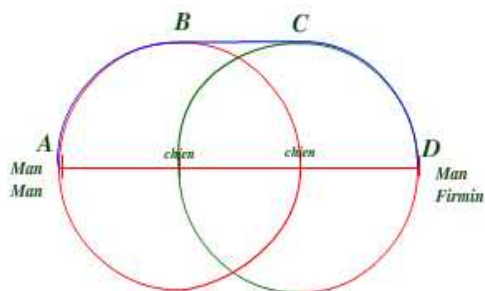
Yannis essaie de trouver le plus court chemin joignant les maisons de sa mère et de sa grand-mère, en restant à un mètre au moins des deux autres.

Aide-le à dessiner ce chemin. Quelle en est la longueur ?

3.1 Corrigé



- Le chien de Man Ibè contrôle le disque délimité par le cercle rouge de rayon $R = 1$ et donc de périmètre $P = 2\pi R = 2\pi$
- Le chien de Man Yaya contrôle le disque délimité par le cercle vert de rayon $R = 1$ et donc de périmètre $P = 2\pi R = 2\pi$
- Le chemin le plus court permettant d'éviter ces deux chiens est formé de l'arc AB suivi du segment $[BC]$ et de l'arc BD
- La longueur de l'arc AB est $\frac{P}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
- la longueur du segment $[BC]$ est 1
- La longueur de l'arc BD est $\frac{P}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$



La longueur de ce chemin est donc $2 \frac{\pi}{2} + 1 = \pi + 1$

4 "Calculons" - 4 points

Calculus, un surdoué des mathématiques, s'amuse à faire des défis de calcul avec ses copains.

Aujourd'hui, son copain Mattheux Spé lui propose un calcul un peu spécial sur lequel il bloque. Le voici :

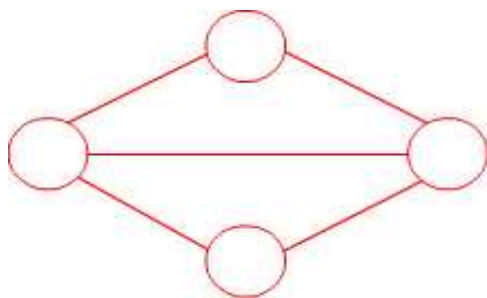
$$1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + \dots + 301 + 302$$

Pouvez-vous l'aider en donnant le résultat ?

4.1 Corrigé

$$\begin{aligned} & 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + \dots + 301 + 302 \\ &= 1 + (2 - 3) + (-4 + 5) + (6 - 7) + (-8 + 9) + (10 - 11) + (-12 + 13) + \dots + \\ & \quad (298 - 299) + (-300 + 301) + 302 \\ &= 1 + [-1 + 1] + [-1 + 1] + [-1 + 1] + \dots + [-1 + 1] + 302 \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + 302 = 1 + 302 = 303 \end{aligned}$$

5 "Esteban et les bulles " - 4 points



Esteban, l'étourdi a malencontreusement effacé le contenu de cette figure. Mais il se souvient qu'elle était remplie de nombres entiers positifs tous différents et que la somme des carrés des nombres situés dans des cases reliées est inférieure à 20.

Aide-le à retrouver les nombres situés dans les bulles.

5.1 Corrigé

Une solution est de placer les entiers 0, 1, 2, 3 dans les cercles.

Une autre solution est de placer les entiers 0, 1, 2, 4.

6 "Sportez-vous bien" - points

Dans une course de 2000 m, Giliane finit 200 m devant Noémie et 290 m devant Alix.

Si Noémie et Alix continuent à courir à la même vitesse, quelle sera, quand elle passera l'arrivée, l'avance de Noémie sur Alix ?

6.1 Corrigé

- Giliane parcourt 2000 m en un temps t_1 .
- Pendant ce temps t_1 Noémie parcourt $2000 - 200 = 1800$ m avec une vitesse v_2 donc $v_2 = \frac{1800}{t_1}$
- Pendant ce temps t_1 Alix parcourt $2000 - 290 = 1710$ m avec une vitesse v_3 donc $v_3 = \frac{1710}{t_1}$

- Noémie continue sur 200 m à la même vitesse v_2 donc $200 = v_2 t_2$ donc $200 = \frac{1800}{t_1} t_2$ donc $t_2 = \frac{200}{1800} t_1 = \frac{t_1}{9}$
- Alix elle pendant ce temps t_2 va parcourir à la vitesse v_3 la distance $d_3 = v_3 t_2 = \frac{1710}{t_1} \frac{t_1}{9} = \frac{1710}{9} = 190 \text{ m}$

Alix à l'issue du temps $t_1 + t_2$ a parcouru $1710 + 190 = 1900 \text{ m}$ donc il lui reste encore 100 m à parcourir. l'avance de Noémie sur Alix est donc de 100 m