Corrigé personnel Crpe 2018 - GA3

Christian CYRILLE

14 avril 2018

"Il ne s'agit ni de rire, ni de pleurer mais de comprendre"
Spinoza

1 Corrigé

1.1 Première partie

On prendra $\pi \approx 3,14$

1. Pour le couloir n° 1 :
   - La somme des distances des deux lignes droites est $d_1 = 100 + 100 = 200\ m$
   - La somme des périmètres des deux demi-cercles est en fait le périmètre du cercle de rayon $31,83\ m$ c'est-à-dire $d_2 = 2 \times \pi \times R \approx 6,28 \times 31,83 \approx 199,89\ m$
   - La distance d'un tour complet est donc $d = d_1 + d_2 \approx 200 + 199,89 \approx 399,89 \approx 400\ m$
2. - L'échelle $\frac{1}{1200}$ veut dire qu'une longueur effective de $1200\ m$ est représentée sur un shéma par une longueur de $1\ m$
   - donc une longueur effective de $1\ m$ est représentée sur un schéma part une longueur de $\frac{1}{1200}\ m$
   - Par conséquent la ligne droite de $100\ m$ est représentée par un segment de longueur $\frac{100}{1200}\ m \approx 0,0833\ m$ c'est-à-dire $8,33\ cm$
   - Le rayon du bord intérieur de $31,83\ m$ est représenté sur le shéma par un rayon de $\frac{31,83}{1200} \approx 0,0265\ m$ c'est-à-dire $2,65\ cm$
   - Le bord extérieur a un rayon de $31,83 + 1,22 = 33,05\ m$ représenté sur le shéma par un rayon de $\frac{33,05}{1200} \approx 0,0275\ m$ c'est-à-dire $2,75\ cm$

3. S'il n'y avait pas de décalage, lorsque le coureur au couloir 1 parcoure effectivement $\pi \times 31,83 + 100 \approx 199,94\ m$

- le coureur au couloir 2 va parcourir $\pi \times (31,83 + 1,22) + 100 \approx 203,77\ m$
- le coureur au couloir 3 va parcourir $\pi \times (31,83 + 2,44) + 100 \approx 207,60\ m$
- le coureur au couloir 4 va parcourir $\pi \times (31,83 + 3,66) + 100 \approx 211,43\ m$
- le coureur au couloir 5 va parcourir $\pi \times (31,83 + 4,88) + 100 \approx 215,26\ m$
- le coureur au couloir 6 va parcourir $\pi \times (31,83 + 6,10) + 100 \approx 219,10\ m$
- le coureur au couloir 7 va parcourir $\pi \times (31,83 + 7,32) + 100 \approx 222,31\ m$
- le coureur au couloir 8 va parcourir $\pi \times (31,83 + 9,54) + 100 \approx 229,90\ m$

4. (a) Le décalage du coureur du couloir 6 est $[\pi \times (31,83 + 6,10) + 100] - 200 \approx 19,10\ m$

(b)
- La longueur L d'un arc de cercle de rayon R et d'angle α est $L = R\alpha$.
- Donc le décalage de $19,10\ m$ est la longueur d'un arc de cercle d'angle $\alpha = \dfrac{L}{R} = \dfrac{19,10}{37,93} \approx 0,503\ radians$
- Or $\pi\ radians$ correspond à 180° donc $1/radian$ correspond à $\dfrac{180}{\pi}^{\circ}$
- donc l'angle mesure environ $0,503 \times \dfrac{180}{\pi} \approx 28,8°$

(c) S'il y avait proportionnalité entre le numéro de couloir et la valeur de α la courbe obtenue serait une droite qui en plus passerait par l'origine O du repère. Or ce n'est pas le cas donc il n'y a pas ici de situation de proportionnalité.

(d) Par lecture graphique pour le couloir 3 on aurait $12° \leq \alpha \leq 14°$

(e) l'élève entrera la formule B à savoir :
$= PI() * ((A2 - 1) * 1,22 + 31,83) - 100$ dans la case $B2$ du tableur pour calculer le décalage. Il fera ensuite glisser cette formule dans les cases $B3 \cdots B8$

A	B	C
Couloir	Décalage en m	Angle alpha en degrés
1	-0,003105836	-0,005590679
2	3,829637201	6,639093758
3	7,662380239	12,81068132
4	11,49512328	18,55796136
5	15,32786631	23,9232375
6	19,16060935	28,94337065
7	22,99335239	33,65062704
8	26,82609543	38,07337252

Voici la feuille avec les formules. Pour les angles en degrés on entre en $C2$ la formule suivante :
$= (B2/((A2 - 1) * 1,22 + 31,83)) * (180/PI())$

A	B	C
Couloir	Décalage en m	Angle alpha en degrés
1	=PI()*((A2-1)*1,22+31,83)-100	=(B2/((A2-1)*1,22+31,83))*(180/PI())
2	=PI()*((A3-1)*1,22+31,83)-100	=(B3/((A3-1)*1,22+31,83))*(180/PI())
3	=PI()*((A4-1)*1,22+31,83)-100	=(B4/((A4-1)*1,22+31,83))*(180/PI())
4	=PI()*((A5-1)*1,22+31,83)-100	=(B5/((A5-1)*1,22+31,83))*(180/PI())
5	=PI()*((A6-1)*1,22+31,83)-100	=(B6/((A6-1)*1,22+31,83))*(180/PI())
6	=PI()*((A7-1)*1,22+31,83)-100	=(B7/((A7-1)*1,22+31,83))*(180/PI())
7	=PI()*((A8-1)*1,22+31,83)-100	=(B8/((A8-1)*1,22+31,83))*(180/PI())
8	=PI()*((A9-1)*1,22+31,83)-100	=(B9/((A9-1)*1,22+31,83))*(180/PI())

5. *Usain BOLT*

La vitesse moyenne de Usain Bolt est $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{200}{19,19} \approx 10,42\ m/s$.

Comme $200\ m = 0,2\ km$ et $19,19\ s = 19,19 \times \dfrac{1}{3600}\ h$

donc $v = \dfrac{0,2 * 3600}{19,19} = \dfrac{729}{19,19} \approx 37,5\ km/h$

(b) $t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{42,195}{37,5}\ h \approx 1,1252\ h = 1\ h\ 7'\ 30"$ car $0,1252\ h = 0,1252 \times 3600" = 450,72 = 7'30"$

(c) Le pourcentage de réduction est : $\dfrac{19,32 - 19,19}{19,32} = 0,0067 \approx 0,67\%$

Michael JOHNSON, "La Locomotive de Waco"

1.2 Deuxième partie

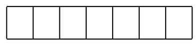
1.2.1 Exercice 1

1. M et B sont des points situés sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 5 donc $OM = OB = 5$.
   Comme $OM = OB$ alors le triangle OMB est isocèle en O.
   Mais M appartient aussi à la médiatrice de $[OB]$, donc $OM = BM$, et donc $OM = OB = BM$, le triangle OMB est donc équilatéral.
2. - Examinons le quadrilatère $AMBS$
   - O est le milieu de la diagonale $[MS]$ car S est le symétrique de M par rapport à O.
   - O est le milieu de $[AB]$ car $[AB]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$
   - $AMBS$ est un quadrilatère dont les diagonales ont même milieu donc est un parallèlogramme.
   - L'angle $A\hat{M}B$ est droit car le triangle AMB est rectangle car il est inscrit dans le demi-cercle de diamètre $[AB]$.
   - Par conséquent , $AMBS$ est un rectangle
3. - Pour des raisons de symétrie, $Aire(AMBS) = 2\ Aire(AMB)$
   - Or $Aire(AMB) = \dfrac{base \times hauteur}{2} = \dfrac{AB \times IM}{2}$ donc $Aire(AMMBS) = AB \times IM$
   - $AB = 10$
   - D'après le théorème de Pythagore, comme IOM est rectangle en I
     $MI^2 + IO^2 = OM^2$ donc $MI^2 = OM^2 - IO^2 = 5^2 - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2$
     $IM^2 = 25 - \dfrac{25}{4} = \dfrac{100}{4} - \dfrac{25}{4} = \dfrac{75}{4}$
     donc $IM = \sqrt{\dfrac{75}{4}} = \dfrac{\sqrt{25 \times 3}}{\sqrt{4}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$
   - donc $Aire(AMBS) = 10 \times \dfrac{5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$
4. (a) Méthode 1 :
   - (MN) est la médiatrice de $[OB]$ donc $MO = MB$ et $NO = NB$
   - Or $OM = ON$ car $M \in \mathcal{C}$ et $N \in \mathcal{C}$
   - donc $OM = MB = NB = NO$.
   - $OMBN$ est un quadrilatère avec ses 4 côtés égaux donc est un losange.

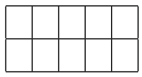
   (b) Méthode 2 :
   - (MN) est la médiatrice de $[OB]$ donc $(MN) \perp (OB)$
   - $OMBN$ est un quadrilatère avec ses deux diagonales (OB) et (MN) perpendiculaires donc est un losange.

1.2.2 Exercice 2

1. 126 a 12 diviseurs :$1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126$ donc **l'affirmation 1 est fausse**.
2. L'affirmation 2 est fausse . Il suffit d'exhiber un contre-exemple : Le polygône A suivant a pour périmètre $P_A = 16$ et pour aire $S_A = 8$

   Le polygône B suivant a pour périmètre $P_B = 14$ et pour aire $S_B = 10$

3. - Augmenter x de 5% l'année 1 c'est passer de x à $1,05x$
   - Augmenter x à nouveau de 5% l'année 2 c'est passer de $1,05x$ à $(1,05)^2x$
   - Augmenter x à nouveau de 5% l'année 3 c'est passer de $(1,05)^2x$ à $(1,05)^3x$
   - $\vdots$
   - Le faire pendant 15 ans c'est passer finalement de x à $(1,05)^{15}x$
   - Or $(1,05)^{15} \approx 2,078$ donc le prix x a plus que doublé.

   L'affirmation 3 est donc vraie.
4. - Un échantillon de parfum est un volume donc a 3 dimensions
   - Réduire chacune des 3 dimensions de   revient à réduire le volume de $\left(\dfrac{1}{5}\right)^3 = \dfrac{1}{125}$
   - Il y a donc 125 fois moins de parfum.

   . L'affirmation 4 est fausse.

1.2.3 Exercice 3

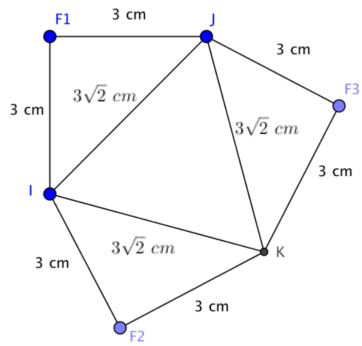
- Nous allons expliquer pourquoi les 7 carrés noirs de côté de longueur 20 pixels sont collés.
- Analysons le bloc d'instructions situé dans la boucle répéter 4 fois :
  1. — le stylo part du coin haut gauche du carré gris noircit le côté et descend au coin bas gauche
     — va ensuite vers le coin bas droit en noircissant le côté
     — remonte vers le coin haut droit en noircissant le côté
     — puis se dirige vers le coin haut gauche en noircissant le côté.
     — La pointe du stylo est donc revenue au coin haut gauche tout en étant orientée vers le bas.
  2. ensuite, l'on saute en avant de 20 pixels donc la pointe du stylo se retrouve au coin bas droit pour dessiner un nouveau carré
  3. Ce nouveau carré gris qui va se noircir est collé sur le précédent

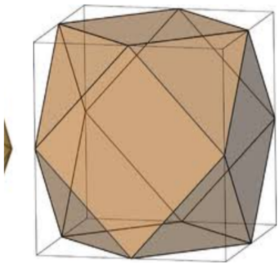
  .
- Pour tracer le nouveau carré plus bas, il faut remplacer "sauter en avant de 20 pixels" par **"sauter en avant de 40 pixels"** et on obtiendra alors le dessin attendu.

1.2.4 Exercice 4

1. - Dans le plan $EFAB$ on examine le triangle EFB :
     I et K sont les milieux des côtés $[EF]$ et $[FB]$ donc d'après le théorème de la droite des milieux on a $(IK)//(EB)$ et $IK = \dfrac{EB}{2}$
   - Même raisonnement par analogie avec le plan $FGCB$; le triangle FGB et les milieux K et J on a $(KJ)//(BC)$ et $KJ = \dfrac{BC}{2}$
   - Même raisonnement par analogie avec le plan $FEHG$; le triangle FEG et les milieux I et J on a $(IJ)//(EG)$ et $IJ = \dfrac{EG}{2}$
   - Or dans ce cube les arêtes sont égales donc en utilisant le théorème de Pythagore les diagonales de chacune ds 6 sont égales donc $EB = BG = EG$

   Donc $IJ = KJ = IK$ donc **le triangle IJK est équilatéral**.
2. - Dans le tétraèdre $FIJK$ on choisira pour base FIK donc FK deviendra la hauteur associée à cette base.
   - Alors $Volume(FIJK) = \dfrac{aire(IFK) \times FJ}{3}$.
   - Or $Aire(IFK) = \dfrac{IF \times FK}{2} = \dfrac{3 \times 3}{2} = \dfrac{9}{2}\ cm^2$
     car le triangle IFK est rectangle en F dans le plan $EFBA$
   - Donc $Volume(FIJK) = \dfrac{aire(IFK) \times FJ}{3} = \dfrac{\frac{9}{2} \times 3}{3} = \dfrac{9}{2} = 4,5\ cm^3$
3. - La diagonale d'une face vaut grâce à Pythagore $\sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$
   - Donc $IK = KJ = IJ = 3\sqrt{2} \approx 3 \times 1,414 \approx 4,242\ cm$
   - On peut donc faire un patron avec $FI = FJ = FK = 3\ cm$ et $IK = KJ = IJ \approx 4,242\ cm$





4. (a)
   - On a enlevé 8 tétraèdres de volume égal à celui de $FIJK$ donc on a enlevé $8 \times \dfrac{9}{2} = 36\ cm^3$
   - Le volume du cube est $6^3 = 216\ cm^3$
   - Donc le volume du cubooctaèdre est $V = 216 - 36 = 180\ cm^3$

   (b) L'arête IK vaut $3\sqrt{2}$. Il y a 24 arêtes de ce type dans l'octaèdre.
   La longueur totale des arêtes est donc $24 \times 3\sqrt{2} \approx 101,8\ cm$

1.3 Troisième partie