

∞ Baccalauréat S Antilles-Guyane 19 juin 2018 ∞

EXERCICE 1

5 points

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

L'exploitant d'une forêt communale décide d'abattre des arbres afin de les vendre, soit aux habitants, soit à des entreprises. On admet que :

- parmi les arbres abattus, 30 % sont des chênes, 50 % sont des sapins et les autres sont des arbres d'essence secondaire (ce qui signifie qu'ils sont de moindre valeur) ;
- 45,9 % des chênes et 80 % des sapins abattus sont vendus aux habitants de la commune ;
- les trois quarts des arbres d'essence secondaire abattus sont vendus à des entreprises.

Partie A

Parmi les arbres abattus, on en choisit un au hasard.

On considère les événements suivants :

- C : « l'arbre abattu est un chêne » ;
- S : « l'arbre abattu est un sapin » ;
- E : « l'arbre abattu est un arbre d'essence secondaire » ;
- H : « l'arbre abattu est vendu à un habitant de la commune ».

1. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune.
3. Justifier que la probabilité que l'arbre abattu soit vendu à un habitant de la commune est égale à 0,5877.
4. Quelle est la probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin ?
On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} .

Partie B

Le nombre d'arbres sur un hectare de cette forêt peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance $\mu = 4000$ et d'écart-type $\sigma = 300$.

1. Déterminer la probabilité qu'il y ait entre 3400 et 4600 arbres sur un hectare donné de cette forêt. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} .
2. Calculer la probabilité qu'il y ait plus de 4500 arbres sur un hectare donné de cette forêt. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} .

Partie C

L'exploitant affirme que la densité de sapins dans cette forêt communale est de 1 sapin pour 2 arbres.

Sur une parcelle, on a compté 106 sapins dans un échantillon de 200 arbres. Ce résultat remet-il en cause l'affirmation de l'exploitant ?

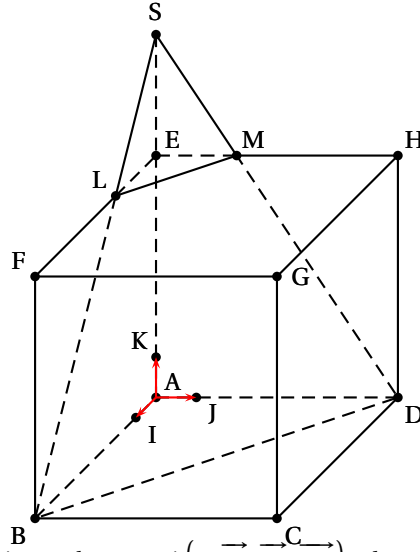
EXERCICE 2

5 points

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.

Ces deux solides sont représentés par le cube ABCDEFGH et par le tétraèdre SELM ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \vec{AI}, \vec{AJ}, \vec{AK})$ tel que : $I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.

Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que $\vec{FL} = \frac{2}{3}\vec{FE}$;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1. Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.
2. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2; 0; 6)$.
3. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (BL).
b. Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0; 0; 9)$.
4. Soit \vec{n} le vecteur de coordonnées $(3; 3; 2)$.
a. Vérifier que \vec{n} est normal au plan (BDL).
b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est :

$$3x + 3y + 2z - 18 = 0.$$

- c. On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Calculer les coordonnées du point M.

5. Calculer le volume du tétraèdre SELM. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}.$$

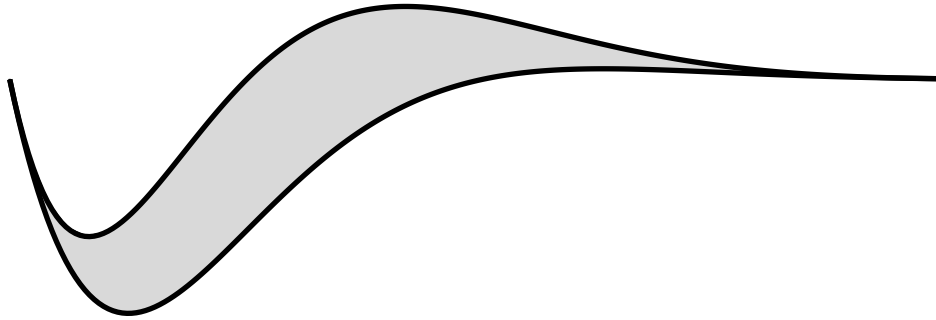
6. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle \widehat{SLE} soit comprise entre 55° et 60° . Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?

EXERCICE 3

5 POINTS

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \text{ et } g(x) = -e^{-x} \cos x.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur \mathbb{R} .

Partie A — Étude de la fonction f

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}.$$

2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
 3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}(2 \cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f .
 4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
 a. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
 b. En déduire les variations de f sur $[-\pi ; \pi]$.

Partie B — Aire du logo

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées en ANNEXE.

1. Étudier la position relative de la courbe \mathcal{C}_f par rapport à la courbe \mathcal{C}_g sur \mathbb{R} .
 2. Soit H la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1 \right) e^{-x}.$$

On admet que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x + 1)e^{-x}$ sur \mathbb{R} .

On note \mathcal{D} le domaine délimité par la courbe \mathcal{C}_f , la courbe \mathcal{C}_g est les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

- a. Hachurer le domaine \mathcal{D} sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.
 b. Calculer, une unité d'aire, l'aire du domaine \mathcal{D} , puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2 .

EXERCICE 4**5 POINTS**

CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1^{er} juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1^{er} juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine;
- entre le 1^{er} novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n) . Selon ce modèle, pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre de cétacés au 1^{er} juin de l'année 2017 + n . On a donc $u_0 = 3000$.

- Justifier que $u_1 = 2926$.
- Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$.
- À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n) . Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

- Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1520$.
 - Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
- On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 1520$.
 - Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
 - En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$.
 - Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 3000$
Tant que ...
$n \leftarrow \dots$
$u \leftarrow \dots$
Fin de Tant que

La notation « \leftarrow » correspond à une affectation de valeur, ainsi « $n \leftarrow 0$ » signifie « Affecter à n la valeur 0 ».

- La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

EXERCICE 4**5 POINTS**

CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le droit de pêche dans une réserve marine est réglementé : chaque pêcheur doit posséder une carte d'accréditation annuelle. Il existe deux types de cartes :

- une carte de pêche dite « libre » entre parenthèse le pêcheur mais pas limité en nombre de poissons pêchés) ;
- une carte de pêche dite « avec quota » (le pêcheur ne doit pas dépasser une certaine quantité hebdomadaire de poisson).

On suppose que le nombre total de pêcheurs reste constant d'année en année.

On note, pour l'année 2017 + n :

- ℓ_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche libre ;
- q_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche avec quota.

On observe que :

- chaque année, 65 % des possesseurs de la carte de pêche libres achète de nouveaux une carte de pêche libre l'année suivante ;
- Chaque année, 45 % des possesseurs de la carte de pêche avec quota acheté une carte de pêche libre l'année suivante ;
- En 2017, 40 % des pêcheurs ont acheté une carte de pêche libre. On a donc $\ell_0 = 0,4$ et $q_0 = 0,6$.

On note, pour tout entier naturel n , $P_n = \begin{pmatrix} \ell_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $P_{n+1} = MP_n$, où M est la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}$.
2. Calculer la proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019.
3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1 ◦	$M := \{\{0,65, 0,45\}, \{0,35, 0,55\}\}$ $\checkmark M := \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}$	5 ◦	TQ $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2 ◦	$P_0 := \{\{0,4\}, \{0,6\}\}$ $\checkmark P_0 := \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$	6 ◦	QT $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3 ◦	$Q := \{\{9, 1\}, \{7, -1\}\}$ $\checkmark Q := \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$	7 ◦	$D := TMQ$ $\rightarrow D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$
4 ◦	$T := \{\{1/16, 1/16\}, \{7/16, -9/16\}\}$ $\checkmark T := \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix}$		

En vous appuyant sur les résultats précédents, répondre aux deux questions suivantes :

- a. Justifier que Q est une matrice inversible et préciser sa matrice inverse.
On notera Q^{-1} la matrice inverse de Q.
- b. Justifier que $M = QDQ^{-1}$ et démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$M^n = QD^nQ^{-1}.$$

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul,

$$M^n = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9+7 \times 0,2^n & 9-9 \times 0,2^n \\ 7-7 \times 0,2^n & 7+9 \times 0,2^n \end{pmatrix}.$$

- a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $P_n = M^n P_0$.
- b. Justifier que, pour tout entier naturel n :

$$\ell_n = \frac{9}{16} - \frac{13}{80} \times 0,2^n.$$

5. La proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre dépassera-t-elle 60 % ?

Exercice 3

