Bac Antilles S 2018

Christian CYRILLE

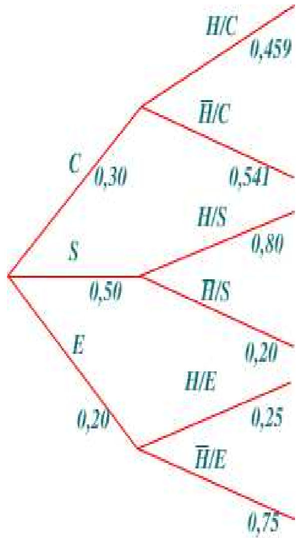
23 juin 2018

0.1 Corrigé

0.1.1 Exercice 1 - 5 points

Partie A

1. Voici un arbre pondéré traduisant la situation :



2. $Pr(C \cap H) = Pr(C)Pr(H/C) = 0,3 \times 0,459 = \boxed{0,1377}$
3. Le système $\{C, S, E\}$ est un système complet d'évènements de l'univers Ω.
   $Pr(H) = Pr(H \cap \Omega) = Pr(H \cap (C \cup S \cup E) = Pr((H \cap C) \cup (H \cap S) \cup (H \cap E))$
   Comme les évènements $H \cap C; H \cap S; H \cap E$ sont disjoints deux à deux alors
   $Pr(H) = Pr(H \cap C) + Pr(H \cap S) + Pr(H \cap E)$
   $= Pr(C)\ Pr(H/C) + Pr(S)\ Pr(H/S) + Pr(E)\ Pr(H/E)$
   $= 0,3 \times 0,459 + 0,5 \times 0,8 + 0,2 \times 0,25 = \boxed{0,5877}$
4. $Pr(S/H) = \dfrac{Pr(S \cap H)}{Pr(H)} = \dfrac{Pr(S)Pr(H/S)}{Pr(H)} = \dfrac{0,5 \times 0,80}{0,5877} \approx \boxed{0,681}$

Partie B

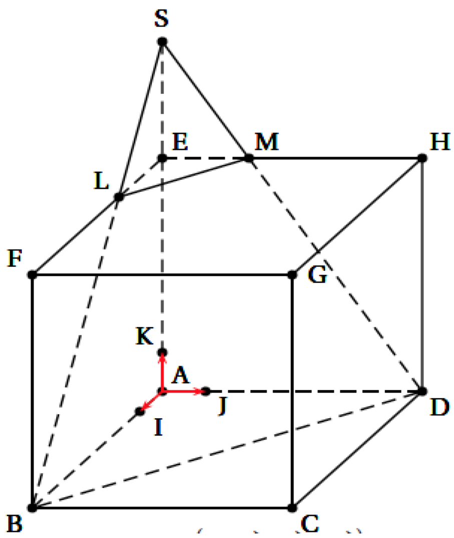
Sur un hectare, le nombre d'arbres $X \hookrightarrow \mathcal{N}(4000; 300)$.

1. Notons $Z = \dfrac{X - 4000}{300}$ alors l'écart centré réduit $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$.
   $Pr(3400 \leq X \leq 4600) = Pr\left(\dfrac{3400 - 4000}{300} \leq \dfrac{X - 4000}{300} \leq \dfrac{4600 - 4000}{300}\right)$
   $= Pr(-2 \leq Z \leq 2) \approx \boxed{0,954}$
2. $Pr(X \geq 4500) = Pr(\dfrac{X - 4000}{300} \geq \dfrac{4500 - 4000}{300}) = Pr(Z \geq \dfrac{5}{3}) = Pr(Z \geq 1,666) \approx \boxed{0,048}$

Partie C

- La probabilité théorique est $p = \dfrac{1}{2} = 0,5$
- La fréquence sur la parcelle est $f = \dfrac{106}{200} = 0,53$
- Comme $n = 200 \geq 30; np = 200 \times 0,5 = 100 \geq 5; n(1-p) = 200 \times 0,5 = 100 \geq 5$ les conditions sur les paramètres n et p sont vérifiées.
- L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil $0,95$ est :
  $IF = [p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}] = [0,5 - 1,96\dfrac{0,5}{\sqrt{200}}; 0,5 + 1,96\dfrac{0,5}{\sqrt{200}}]$
  donc $IF = [0,43; 0,56]$
- Comme $f = 0,53 \in IF$ alors **l'affirmation de l'exploitant est acceptable**.

0.1.2 Exercice 2 - 5 points



1. - Le plan (BDL) est sécant avec le plan $(ABCD)$ selon la droite (BD).
   - Le plan $(EFGH)$ est parallèle au plan $(ABCD)$.
   - Donc le plan $5BDL)$ est sécant avec le plan $(EFGH)$ selon une droite parallèle à la droite (BD).
   - Or le plan (BDL) est sécant avec le plan $(EFGH)$ selon la droite (LM).
   - En conclusion, les droites (BD) et (LM) sont parallèles.
2. - $\overrightarrow{FL} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{FE} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}$
   - $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} x_A - x_B = 0 - 6 = -6 \\ y_A - y_B = 0 - 0 = 0 \\ z_A - z_B = 0 - 0 = 0 \end{pmatrix}$ donc $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   - Or $\overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} x_L - x_F \\ y_L - y_F \\ z_L - z_F \end{pmatrix}$

- Par conséquent, $\begin{cases} x_L - x_F = -4 \\ y_L - y_F = 0 \\ z_L - z_F = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_L - 6 = -4 \\ y_L - 0 = 0 \\ z_L - 6 = 0 \end{cases}$ donc $\boxed{L \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}$

3. (a) $N \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (BL) \iff \exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{BN} = t\overrightarrow{BL}$

$\iff \exists t \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x - x_B = t(x_L - x_B) \\ y - y_B = t(y_L - y_B) \\ z - z_B = t(z_L - z_B) \end{pmatrix} \iff \exists t \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x - 6 = t(2-6) \\ y - 0 = t(0-0) \\ z - 0 = t(6-0) \end{pmatrix}$

Un système d'équations paramétriques de la droite (BL) est donc $\boxed{\exists t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = -4t + 6 \\ y = 0 \\ z = 6t \end{cases}}$

(b) Dans le plan $(ABFE)$ on rencontre une situation de Thalès papillon avec les triangles $LFB; LES$ et les parallèles (EB) et (ES).

Alors $\dfrac{BL}{BS} = \dfrac{FL}{FE} = \dfrac{2}{3}$ donc $BS = \dfrac{3}{2}BL$ d'où $\begin{cases} x_S - x_B = \dfrac{3}{2}(x_L - x_B) \\ \\ y_S - y_B = \dfrac{3}{2}(y_L - y_B) \\ \\ z_S - z_B = \dfrac{3}{2}(z_L - z_B) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_S - 6 = \dfrac{3}{2}(2-6) \\ \\ y_S - 0 = \dfrac{3}{2}(0-0) \\ \\ z_S - 0 = \dfrac{3}{2}(6-0) \end{cases}$

d'où $\boxed{S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}}$

4. Soit $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(a) $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BL} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

donc $\vec{n}.\overrightarrow{BD} = 3(-6) + 3(6) + 2(0) = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{BL} = 3(-4) + 3(0) + 2(6) = 0$.
Comme $\vec{n}$ est orthogonal à la fois aux vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BL}$ alors il est normal au plan (BDL)

(b) Comme $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal au plan (BDL) alors une équation cartésienne du plan $BDL)$ est
$3x + 3y + 2z + d = 0$. Reste à déterminer d.
Comme $B(6, 0, 0) \in (BDL)$ alors $3(6) + 3(0) + 2(0) + d = 0$ donc $d = -18$.
Une équation cartésienne du plan (BDL) est donc $\boxed{3x + 3y + 2z - 18 = 0}$.

(c)
- Dans le plan (SBD), les droites (LM) et (BD) sont parallèles donc on peut appliquer le théorème de Thalès :
$\dfrac{LM}{BD} = \dfrac{SL}{SB}$

- Comme $S\begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{SL}\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$
- Comme $S\begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix}6\\0\\-9\end{pmatrix}$
- Par conséquent, $\overrightarrow{SL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$. Donc $\overrightarrow{LM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$
- Or $B\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix}$
- Donc $\overrightarrow{LM}\begin{pmatrix}x_M-x_L=x_M-2\\y_M-y_L=y_M-0\\z_M-z_L=z_M-6\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$ d'où $\boxed{M\begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix}}$

.

5. - La base a pour aire $\frac{1}{2}(EL\times EM)=\frac{1}{2}(2\times 2)=2$
   - La hauteur $ES=3$
   - Donc le tétraèdre $SELM$ a pour volume $\boxed{V=\frac{1}{3}(2\times 3)=2\ m^3}$

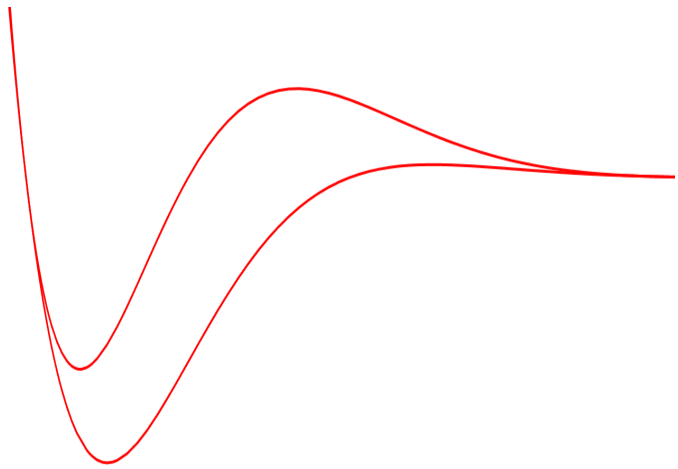
6. $tan(\widehat{SLE})=\frac{SE}{EL}=\frac{3}{2}$ donc $\boxed{\widehat{SLE}=Arctan\left(\frac{3}{2}\right)\approx 0.98\ rd\approx 56^\circ}$

   Donc la contrainte d'angle est respectée.

0.1.3 Exercice 3 - 5 points

Ce logo est dessiné à l'aide des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x}(-cos(x) + sin(x) + 1) \text{ et } g(x) = -e^{-x}\,cos(x)$$



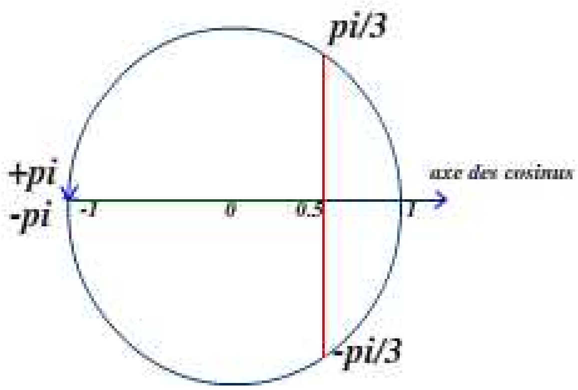
0.1.4 Partie A : Etude de la fonction f

1. - On sait que $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq cos(x) \leq 1$ donc $1 \geq -cos(x) \geq -1$ d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq -cos(x) \leq 1$
   - De même, $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq sin(x) \leq 1$
   - D'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad -2 \leq -cos(x) + sin(x) \leq 2$
   - Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq -cos(x) + sin(x) + 1 \leq 3$
   - Or $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad -e^{-x} \leq e^{-x}\,(-cos(x) + sin(x) + 1) \leq 3e^{-x}$
   - On a donc prouvé que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad -e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}}$
2. - Comme $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} -x = -\infty$ et que $\lim\limits_{X \mapsto -\infty} e^X = 0$
   - Alors $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} -e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} 3e^{-x} = 0$
   - Donc comme $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$, d'après le théorème d'encadrement des fonctions ayant même limite , plus communément connu sous le nom de théorème des gendarmes, on obtient $\boxed{\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0}$
3. - cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc $h : x \mapsto -cos(x) + sin(x) + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - $k : x \mapsto e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.
   - Par conséquent f qui est le produit hk est donc dérivable sur $\mathbb{R}$
   - En utilisant la dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$ qui est $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ alors
     $f'(x) = -e^{-x}\,(-cos(x) + sin(x) + 1) + e^{-x}\,(sin(x) + cos(x))$
     $f'(x) = e^{-x}\,(cos(x) - sin(x) - 1 + sin(x) + cos(x))$

- Par conséquent, $\boxed{f'(x) = e^{-x}\left(2\,cos(x) - 1\right)}$

4. Etudions f sur $[-\pi;\pi]$.

   (a) • Comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} > 0$ on a :
   $f'(x) = 0 \iff e^{-x}\left(2\,cos(x) - 1\right) = 0 \iff 2\,cos(x) - 1 = 0$
   $\iff cos(x) = \dfrac{1}{2} \iff x = -\dfrac{\pi}{3}$ ou $\dfrac{\pi}{3}$



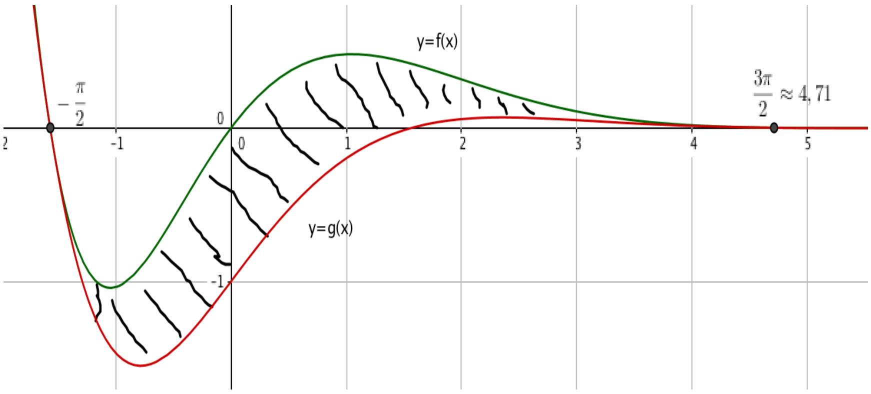
   • $f'(x) > 0 \iff e^{-x}\left(2\,cos(x) - 1\right) > 0 \iff 2\,cos(x) - 1 > 0$
   $\iff cos(x) > \dfrac{1}{2} \iff -\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{3}$

   • $f'(x) < 0 \iff e^{-x}\left(2\,cos(x) - 1\right) < 0 \iff 2\,cos(x) - 1 < 0$
   $\iff cos(x) < \dfrac{1}{2} \iff -\pi \leq x < -\dfrac{\pi}{3}$ ou $\dfrac{\pi}{3} < x \leq \pi$

   (b) Par conséquent,

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$2e^{\pi}$	$\searrow$	$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{3}}$	$\nearrow$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{3}}$	$\searrow$	$2e^{-\pi}$

0.1.5 Partie B : Aire du logo



1. - $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - g(x) = e^{-x}(-cos(x) + sin(x) + 1 + cos(x)) = e^{-x}(sin(x) + 1)$
   - Comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} > 0$ et que $sin(x) + 1 \geq 0$ car $-1 \leq sin(x) \leq 1$ on a donc $f(x) - g(x) \geq 0$
   - $f(x) - g(x) = 0 \iff sin(x) = -1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc $\mathcal{C}_f$ coupe $\mathcal{C}_g$ en tous les points d'abscisse $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$
   - Autrement, $f(x) - g(x) > 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est strictement au dessus de $\mathcal{C}_g$
2. (a)
   - cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto -\dfrac{cos(x)}{2} - \dfrac{sin(x)}{2} - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - $x \mapsto e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.
   - Par conséquent H qui est le produit des deux fonctions dérivables est donc dérivable sur $\mathbb{R}$
   - En utilisant la dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$ qui est $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ alors
     $H'(x) = -e^{-x}\left(-\dfrac{cos(x)}{2} - \dfrac{sin(x)}{2} - 1\right) + e^{-x}\left(\dfrac{sin(x)}{2} - \dfrac{cos(x)}{2}\right)$
     $H'(x) = e^{-x}\left(\dfrac{cos(x)}{2} + \dfrac{sin(x)}{2} + 1 + \dfrac{sin(x)}{2} - \dfrac{cos(x)}{2}\right)$
     donc $H'(x) = (sin(x) + 1)e^{-x}$
   - Par conséquent, H est une primitive de $f - g$

   (b) En unités d'aire, $Aire(\mathcal{D}) = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (f(x) - g(x))\ dx = [H(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = H(\tfrac{3\pi}{2}) - H(-\tfrac{\pi}{2})$

   Par conséquent $\boxed{Aire(\mathcal{D}) = -\dfrac{1}{2}e^{-\frac{3\pi}{2}} + \dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} \approx 2,4\ u.a \approx 9,6\ cm^2}$

0.1.6 Exercice 4 (enseignement obligatoire - 5 points)

1.
   - Le 1er juin 2017 l'effectif initial est $u_0 = 3000$
   - Entre le 1er juin 2017 et le 31 octobre arrivent 80 cétacés. Le 31 octobre, il y a donc 3080 cétacés
   - Entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve a une perte de $\dfrac{3080 \times 5}{100} = 154$ cétacés.

   Donc l'effectif au 1er juin 2018 est $\boxed{u_1 = 3080 - 154 = 2926}$

2. $u_{n+1} = (u_n + 80) - \dfrac{5}{100}(u_n + 80) = u_n(1 - \dfrac{5}{100}) + 80 - \dfrac{5}{100}80 = 0,95u_n + 80 - 4$

   Par conséquent, $\boxed{u_{n+1} = 0,95u_n + 76}$.

   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a = 0,95$ et $b = 76$.

3. En configurant le format des cellules pour arrondir les nombres à l'unité , la formule $= 0,95 * B2 + 76$ mise dans la cellule $C2$ puis recopiée vers la droite en $D2, E2, \cdots$ permet d'obtenir tous les termes de la suite (u_n)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	un	3000	=0,95*B2+76	=0,95*C2+76	=0,95*D2+76	=0,95*E2+76	=0,95*F2+76	=0,95*G2+76	=0,95*H2+76

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	un	3000	2926	2856	2789	2725	2665	2608	2554
3									

4. (a) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 1520$
   - Cette propriété est vraie au rang $n = 0$ car $u_0 = 3000$ et $3000 \geq 1520$.
   - Supposons que cette propriété est vraie pour un certain entier naturel k c'est-à-dire supposons que $u_k \geq 1520$.
     Alors $0,95u_k \geq 0,95 \times 1520 = 1444$ donc $0,95u_k + 76 \geq 1444 + 76 = 1520$ donc $u_{k+1} \geq 1520$
   - Cette propriété étant initialisée en 0 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier naturel n

   (b)
   - $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = 0,95u_n + 76 - u_n = 76 - 0,05u_n$
   - Comme $u_n \geq 1520$ alors $0,05u_n \geq 0,05 \times 1520 = 76$ donc $-0,05u_n \leq -76$ d'où $76 - 0,05u_n \leq 76 - 76$
   - Par conséquent, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante

   (c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1520 est donc convergente de limite L avec $L \geq 1520$

5. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - 1520$

   (a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 1520 = 0,95u_n + 76 - 1520 = 0,95u_n - 1444$
   $v_{n+1} = 0,95(u_n - 1520)$ donc $\boxed{v_{n+1} = 0,95\, v_n}$.
   Par conséquent, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1520 = 3000 - 1520 = 1480$

   (b) Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = q^n\, v_0 = 0,95^n \times 1480$
   d'où $\boxed{u_n = v_n + 1520 = 1480 \times 0,95^n + 1520}$

   (c) Comme $-1 < 0,95 < 1$ alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 0,95^n = 0$ donc $\boxed{L = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 1520}$

6. L'algorithme suivant rédigé en pseudo-code permet de déterminer l'année $2017 + n$ à partir de laquelle la réserve aura moins de 2000 cétacés.

```
n <-- 0
u <-- 3000
Tant que u > 2000
      n <-- n + 1
      u < -- 0.95*u + 76
 Fin de Tant que
 afficher n
```

7. $u_n < 2000 \iff 1480 \times 0,95^n + 1520 < 2000 \iff 1480 \times 0,95^n < 480$
   $\iff 0,95^n < \dfrac{480}{1480} \iff ln(0,95^n) < ln\left(\dfrac{480}{1480}\right) \iff n\, ln(0,95) < ln\left(\dfrac{480}{1480}\right)$
   $\iff n > \dfrac{ln\left(\dfrac{480}{1480}\right)}{ln(0,95)}$ car $ln(0,95) < 0$ puisque $0 < 0,95 < 1$.
   Comme $\dfrac{ln\left(\dfrac{480}{1480}\right)}{ln(0,95)} \approx 21,95$ alors $\boxed{n = 22}$.
   Par conséquent,
   la réserve aura moins de 2000 **cétacés à partir de l'année** $2017 + 22 = 2039$

Complément :

Une suite (u_n) définie sur I est dite arithmético-géométrique lorsque :

$$\exists a \in \mathbb{R} - \{1\} \;\; \exists b \in \mathbb{R}^* \;\; \forall n \in I \quad u_{n+1} = au_n + b$$

On peut encore écrire $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction affine $x \mapsto ax + b$ avec $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

Soit $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$ alors
la fonction affine $x \mapsto ax + b$ admet un point fixe unique $L = \dfrac{b}{1-a}$

L est un point fixe de $f \iff L = f(L) \iff L = aL + b \iff L(1-a) = b \iff L = \dfrac{b}{1-a}$ car $a \neq 1$

Soit la suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors :
- la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N} \;\; v_n = u_n - L$ est une suite géométrique de raison a et de premier terme v_0.
- Alors $\forall n \in \mathbb{N} \;\; v_n = a^n v_0$
- D'où $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = a^n(u_0 - L) + L$

$v_{n+1} = u_{n+1} - L = au_n + b - L = au_n + b - (aL + b) = a(u_n - L) = av_n$

Dans cet exercice, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est une suite arithmético-géométrique de la forme** $u_{n+1} = au_n + b$ **avec** $a = 0,95$ **et** $b = 76$**.**
Ici $L = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{76}{1-0,95} = \dfrac{76}{0,05} = 1520$

0.1.7 Exercice 5 (enseignement de spécialité) - 5 points

1. • L'année $2017+(n+1)$ le nombre de pêcheurs libres est :
   $l_{n+1} = \dfrac{65}{100} l_n + \dfrac{45}{100} q_n = 0,65 l_n + 0,45 q_n$
   • L'année $2017+(n+1)$ le nombre de pêcheurs sous quota est :
   $q_{n+1} = \dfrac{35}{100} l_n + \dfrac{55}{100} q_n = 0,35 l_n + 0,55 q_n$
   • Par conséquent, $P_{n+1} = \begin{pmatrix} l_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_n \\ q_n \end{pmatrix} = M\, P_n$
2. Pour $n = 2$ l'année $2017+n$ sera l'année 2019 :
   $P_2 = P_{1+1} = M\, P_1 = M\, M\, P_0 = M^2\, P_0 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$
   $P_2 = \begin{pmatrix} 0,58 & 0,54 \\ 0,42 & 0,46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,53 \\ 0,47 \end{pmatrix}$
   Donc la proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019 est $\boxed{q_2 = 0,47}$.
3. (a) Comme $TQ = QT = I$ alors Q est inversible et $Q^{-1} = T$
   (b) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad M^n = QD^nQ^{-1}$
   - La propriété est vraie pour $n = 1$ car
     $QDQ^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & \frac{1}{5} \\ 7 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{20} & \frac{9}{20} \\ \frac{7}{20} & \frac{11}{20} \end{pmatrix}$
     $QDQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix} = M$
   - Supposons que cette propriété est vraie pour un certain entier naturel k c'est-à-dire supposons que $M^k = QD^kQ^{-1}$ alors $M^{k+1} = MM^k = QDQ^{-1}QD^kQ^{-1} = QDID^kQ^{-1} = QDD^kQ^{-1} = QD^{k+1}Q^{-1}$
   - Cette propriété étant initialisée en 1 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier naturel non nul n.
4. Comme D est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix}$, on démontre aisément par récurrence que
   $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (0,2)^n \end{pmatrix}$ donc
   $M^n = QD^nQ^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0,2^n \\ 7 & -0,2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix}$
   On a donc $\boxed{M^n = \dfrac{1}{16} \begin{pmatrix} 9+7\times 0,2^n & 9-9\times 0,2^n \\ 7-7\times 0,2^n & 7+9\times 0,2^n \end{pmatrix}}$

(a) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = M^n P_0$

- La propriété est vraie pour $n = 0$ car $M^0 P_0 = IP_0 = P_0$
- Supposons que cette propriété est vraie pour un certain entier naturel k c'est-à-dire supposons que $P_k = M^k P_0$ alors $P_{k+1} = MP_k = MM^k P_0 = M^{k+1} P_0$
- Cette propriété étant initialisée en 0 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier naturel non nul n.

(b) Comme $\begin{pmatrix} l_n \\ q_n \end{pmatrix} = P_n = \dfrac{1}{16} \begin{pmatrix} 9 + 7 \times 0,2^n & 9 - 9 \times 0,2^n \\ 7 - 7 \times 0,2^n & 7 + 9 \times 0,2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$

donc $l_n = \dfrac{1}{16} \left((9 + 7 \times 0,2^n)(0,4) + (9 - 9 \times 0,2^n)(0,6) \right)$

$l_n = \dfrac{1}{16} \left((9 \times 0,4 + 7 \times 0,4 \times 0,2^n + 9 \times 0,6 - 9 \times 0,6 \times 0,2^n \right)$

$l_n = \dfrac{1}{16} \left((9 \times (0,4 + 0,6) + (7 \times 0,4 - 9 \times 0,6) \times 0,2^n \right) = \dfrac{1}{16} \left(9 - 2,6 \times 0,2^n \right)$

$l_n = \dfrac{9}{16} - \dfrac{2,6}{16} \times 0,2^n = \dfrac{9}{16} - \dfrac{2,6 \times 5}{16 \times 5} \times 0,2^n$ donc $\boxed{l_n = \dfrac{9}{16} - \dfrac{13}{80} \times 0,2^n}$

5. Comme $l_n = \dfrac{9}{16} - \dfrac{13}{80} \times 0,2^n$ et que $-\dfrac{13}{80} \times 0,2^n \leq 0$ alors $l_n \leq \dfrac{9}{16} \approx 0,56$
donc **la proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre ne dépassera pas** 60%.