

Le jeu du Sèbi-Craps

Groupe Kabrit Bwa Irem section Martinique

22 février 2019

1 Le jeu du craps



"Dieu ne joue pas aux dés! "

(Lettre d'Albert Einstein à Max Born à propos de la mécanique quantique)

1.1 Etude du jet simultané de deux dés non pipés



On lance simultanément 2 dés non truqués numérotés de 1 à 6.

1. Définir l'univers Ω correspondant au lancer des 2 dés.
2. On s'intéresse à la variable aléatoire réelle S = la somme des numéros apparaissant sur les faces de dessus.

Déterminer :

- l'univers-image $S < \Omega >$ puis la loi de probabilité de S
- l'espérance mathématique de S
- l'événement élémentaire de $S < \Omega >$ qui a la probabilité la plus forte.
- Vérifier que pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq 7$,

$$P([S = 14 - k]) = P([S = k]) = \frac{k - 1}{36}$$

- Vérifier que pour tout entier k vérifiant $7 \leq k \leq 12$,

$$P([S = 14 - k]) = P([S = k]) = \frac{13 - k}{36}$$

- Calculer la probabilité $P([S \notin \{k; 7\}])$ pour chaque $k \in \{4; 5; 6\}$.

En déduire une formule générale de $P([S \notin \{k; 7\}])$ pour $k \in \{4; 5; 6\}$

- Calculer la probabilité $P([S \notin \{k; 7\}])$ pour chaque $k \in \{8; 9; 10\}$.

En déduire une formule générale de $P([S \notin \{k; 7\}])$ pour $k \in \{8; 9; 10\}$.



1.2 Le craps



Le jeu du craps, jeu à 1 joueur très populaire aux Etats-Unis, est une succession de jets simultanés de 2 dés discernables, par exemple de couleurs différentes, non pipés.

Il ressemble au jeu du sèbi, lui aussi très populaire en Martinique. il n'en diffère que sur un seul point comme on le verra plus bas.

On considère les jets comme des épreuves indépendantes. A chaque jet on s'intéresse à S la somme des numéros portés sur les faces du dessus.

La règle du jeu est la suivante :

- le premier jet est particulier :
 - si $S = 7$ ou 11 le joueur gagne et la partie est terminée. (**Dans le sèbi martiniquais, on peut aussi gagner avec 10 obtenu par (5, 5)**)
 - Si $S = 2, 3$ ou 12 le joueur perd et la partie est terminée..
 - Si $S = 4, 5, 6, 8, 9$ ou 10 , la partie n'est pas encore terminée : le joueur reprend les dés et effectue un second jet.

Dans ce cas, on note $k \in \{4; 5; 6; 8; 9; 10\}$ le résultat du premier jet.
- A partir de là, le joueur relance les dés :
 - Si $S = k$ le joueur gagne et la partie est terminée..
 - Si $S = 7$ le joueur perd et la partie est terminée.
 - Sinon, il reprend les dés et effectue le jet suivant
- L'objectif du joueur est de reproduire la valeur k en essayant d'éviter de réaliser la valeur 7.

1. Soient n un entier naturel non nul et $k \in \{4; 5; 6\}$.

On suppose que lors du premier jet, le joueur a réalisé l'événement $[S = k]$.

Montrer que, pour $n \geq 2$, la probabilité de l'événement "le joueur gagne (c'est-à-dire reproduit $S = k$) au n -ième jet" vaut :

$$\frac{k-1}{36} \left(\frac{31-k}{36} \right)^{n-2}$$

2. En déduire que si le joueur a réalisé $[S = k]$ pour $k \in \{4; 5; 6\}$ lors du premier jet, la probabilité de gagner à partir du second jet vaut :

$$P(D_k) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{k-1}{36} \left(\frac{31-k}{36} \right)^{n-2} = \frac{k-1}{k+5}$$

3. Soient n un entier naturel non nul et $k \in \{8; 9; 10\}$.

On suppose que lors du premier jet, le joueur a réalisé l'événement $[S = k]$.

Montrer que, pour $n \geq 2$, la probabilité de l'événement "le joueur gagne (c'est-à-dire reproduit $S = k$) au n -ième jet" vaut :

$$\frac{13-k}{36} \left(\frac{17+k}{36} \right)^{n-2}$$

4. En déduire que si le joueur a réalisé $[S = k]$ pour $k \in \{8; 9; 10\}$ lors du premier jet, la probabilité de gagner à partir du second jet vaut :

$$P(E_k) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{13-k}{36} \left(\frac{17+k}{36} \right)^{n-2} = \frac{13-k}{19-k}$$

5. Soit G' l'événement "le joueur gagne au premier jet". Déterminer la probabilité de G' .

6. Soit G'' l'événement "le joueur ne perd ni ne gagne au premier jet mais gagne après le premier jet".

$$\text{Montrer que } P(G'') = 2 \sum_{k=4}^6 \frac{k-1}{k+5} \frac{k-1}{36}.$$

7. Soit G l'événement "le joueur gagne".
 Montrer que $G = G' \cup G''$.
 Calculer $P(G)$ et vérifier que le jeu de craps n'est pas trop "voleur" c'est-à-dire que la probabilité pour le joueur de gagner est très peu inférieure à 0.5.
 On utilisera $\frac{8}{36} \approx 0.222$; $\frac{9}{324} \approx 0.027$; $\frac{16}{360} \approx 0.044$; $\frac{25}{396} \approx 0.063$
8. Ecrire un programme en Turbo-Pascal simulant le jeu du craps (pas celui du sébi). On lance simultanément les 2 dés. Les gains obtenus au jeu du craps sont les suivants :
- si l'on obtient 7 ou 11 on gagne 15 euros
 - si l'on obtient 2 ou 3 ou 12 on perd 15 euros
 - si l'on obtient autre chose comme somme on rejoue jusqu'à ce que l'on trouve un total valant cette somme (on gagne alors 30 euros) mais si l'on fait 7 comme total l'on perd 30 euros.
- Ce programme utilisera obligatoirement dans le programme principal les instructions :
- *randomize* pour initialiser le générateur de nombres aléatoires
 - *random(n)* qui ramène un entier entre 0 et $n - 1$
- et fera appel aux procédures suivantes :
- les procédures avec passage de paramètres par valeur *GAGNE* et *PERDU*
 - la procédure non récursive *ONREJOUÉ*.
9. Modifier uniquement la procédure *ONREJOUÉ* pour la rendre récursive. On rappelle qu'une procédure est dite récursive lorsque dans le corps de son programme elle fait appel à elle-même.



10. Ecrire un programme récursif en scilab simulant le jeu du sébi.
11. Ecrire un programme non récursif en scilab (en utilisant la structure while) simulant le jeu du sébi.



2 Corrigé

2.1 Résultats préliminaires

Soit q un réel strictement compris entre 0 et 1. Soit N un entier naturel non nul.

1. $\sum_{k=0}^N q^k$ est la somme de $(n+1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme q^0 et de

$$\text{raison } q \text{ donc } \sum_{k=0}^N q^k = q^0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

2. Comme $0 < q < 1$

$$\text{alors } \lim_{N \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0 \text{ donc } \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N q^k = \frac{1}{1 - q}$$

2.2 Etude du jet simultané de deux dés non pipés

On lance simultanément 2 dés non truqués numérotés de 1 à 6.

- L'univers Ω correspondant au lancer des 2 dés est $\Omega = [[1; 6]]^2$
- On s'intéresse à la variable aléatoire réelle S = la somme des numéros apparaissant sur les faces de dessus. Déterminer :
 - l'univers-image $S < \Omega > = [[2; 12]]$
 - la loi de probabilité de S est entièrement déterminée par la connaissance des $p_i = P([S = s_i])$ où les s_i sont les éléments de $[[2; 12]]$
 D'après le tableau suivant :

de2	1	2	3	4	5	6
de 1						
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

- on en déduit que l'événement élémentaire de $S < \Omega >$ qui a la probabilité la plus forte est 7.
Comme

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	total
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$s_i p_i$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{252}{36} = 7$

alors l'espérance mathématique de S est $E(S) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = 7$.

- On peut vérifier que pour tout entier k vérifiant $2 \leq k \leq 7$,

$$P([S = 14 - k]) = P([S = k]) = \frac{k - 1}{36}$$

- On peut vérifier que pour tout entier k vérifiant $7 \leq k \leq 12$,

$$P([S = 14 - k]) = P([S = k]) = \frac{13 - k}{36}$$

- la probabilité $P([S \notin \{4; 7\}]) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36}$

$$\text{la probabilité } P([S \notin \{5; 7\}]) = 1 - \frac{10}{36} = \frac{26}{36}$$

$$\text{la probabilité } P([S \notin \{6; 7\}]) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$$

donc la probabilité $P([S \notin \{k; 7\}]) = \frac{31-k}{36}$ pour $k \in \{4; 5; 6\}$

la probabilité $P([S \notin \{8; 7\}]) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$

la probabilité $P([S \notin \{9; 7\}]) = 1 - \frac{10}{36} = \frac{26}{36}$

la probabilité $P([S \notin \{10; 7\}]) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36}$

donc la probabilité $P([S \notin \{k; 7\}]) = \frac{17+k}{36}$ pour $k \in \{8; 9; 10\}$

2.3 Le craps

Le jeu du craps, jeu à 1 joueur très populaire aux Etats-Unis, est une succession de jets simultanés de 2 dés discernables, par exemple de couleurs différentes, non pipés. Il ressemble au jeu du sèbi, lui aussi très populaire en Martinique. il n'en diffère que sur un seul point comme on le verra plus bas.

On considère les jets comme des épreuves indépendantes. A chaque jet on s'intéresse à S la somme des numéros portés sur les faces du dessus.

La règle du jeu est la suivante :

— le premier jet est particulier :

— si $S = 7$ ou 11 le joueur gagne et la partie est terminée. (Dans le sèbi martiniquais, on peut aussi gagner avec 10 obtenu par $(5, 5)$)

— Si $S = 2, 3$ ou 12 le joueur perd et la partie est terminée..

— Si $S = 4, 5, 6, 8, 9$ ou 10 , la partie n'est pas encore terminée : le joueur reprend les dés et effectue un second jet.

Dans ce cas, on note $k \in \{4; 5; 6; 8; 9; 10\}$ le résultat du premier jet.

— A partir de là, le joueur relance les dés :

— Si $S = k$ le joueur gagne et la partie est terminée..

— Si $S = 7$ le joueur perd et la partie est terminée.

— Sinon, il reprend les dés et effectue le jet suivant

— L'objectif du joueur est de reproduire la valeur k en essayant d'éviter de réaliser la valeur 7 .

1. Soient n un entier naturel non nul et $k \in \{4; 5; 6\}$.

On suppose que lors du premier jet, le joueur a réalisé l'événement $[S = k]$.

Pour $n \geq 2$, "le joueur gagne (c'est-à-dire reproduit $S = k$) au n -ième jet lorsque du 2ème jet au $(n-1)$ -ième jet il ne fait ni k , ni 7 puis au n ème jet il fait k donc la probabilité de l'événement "le joueur gagne (c'est-à-dire reproduit $S = k$) au n -ième jet " vaut :

$$\left(\frac{31-k}{36}\right)^{n-2} \frac{k-1}{36}$$

2. Si le joueur a réalisé $[S = k]$ pour $k \in \{4; 5; 6\}$ lors du premier jet, la probabilité de gagner à partir du second jet (donc soit au 2-ème, soit au 3-ème ...) vaut :

$$P(D_k) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{k-1}{36} \left(\frac{31-k}{36}\right)^{n-2} = \frac{k-1}{36} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{31-k}{36}\right)^{n-2} = \frac{k-1}{36} \frac{1}{1 - \frac{31-k}{36}} = \frac{k-1}{36} \frac{36}{5+k} = \frac{k-1}{k+5}$$

3. Soient n un entier naturel non nul et $k \in \{8; 9; 10\}$.

On suppose que lors du premier jet, le joueur a réalisé l'événement $[S = k]$.

Pour $n \geq 2$, "le joueur gagne (c'est-à-dire reproduit $S = k$) au n -ième jet lorsque du 2ème jet au $(n-1)$ -ième jet il ne fait ni k , ni 7 puis au n ème jet il fait k la probabilité de l'événement "le joueur gagne (c'est-à-dire reproduit $S = k$) au n -ième jet " vaut :

$$\left(\frac{17+k}{36}\right)^{n-2} \frac{13-k}{36}$$

4. Si le joueur a réalisé $[S = k]$ pour $k \in \{8; 9; 10\}$ lors du premier jet, la probabilité de gagner à partir du second jet (donc soit au 2-ème, soit au 3-ème ...) vaut :

$$P(E_k) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{13-k}{36} \left(\frac{17+k}{36}\right)^{n-2} = \frac{13-k}{36} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{17+k}{36}\right)^{n-2} = \frac{13-k}{36} \frac{1}{1 - \frac{17+k}{36}} = \frac{13-k}{36} \frac{36}{19-k}$$

$$P(E_k) = \frac{13-k}{19-k}$$

5. Soit G' l'événement "le joueur gagne au premier jet" c'est-à-dire "le joueur fait 7 ou 11". Comme ces 2 événements sont disjoints alors la probabilité de G' est $\frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} \approx 0.222$.

6. Soit G'' l'événement "le joueur ne perd ni ne gagne au premier jet mais gagne après le premier jet". Donc "le joueur fait soit 4 ou 5 ou 6 puis D_k soit 8 ou 9 ou 10 suivi de E_k ", ces 2 événements sont disjoints.

Donc $P(G'') = \sum_{k=4}^6 \frac{k-1}{k+5} \frac{k-1}{36} + \sum_{k=8}^{10} \frac{13-k}{19-k} \frac{13-k}{36} = 2 \sum_{k=4}^6 \frac{k-1}{k+5} \frac{k-1}{36}$ en posant $13-k = h-1$ dans la deuxième sommation.

7. Soit G l'événement "le joueur gagne".

Alors de deux choses l'une,

ou bien "le joueur a gagné au premier jet"

ou bien "le joueur ne perd ni ne gagne au premier jet mais gagne après le premier jet" donc comme ces deux événements sont disjoints alors $G = G' \cup G''$.

$$P(G) = P(G') + P(G'') = \frac{8}{36} + 2 \sum_{k=4}^6 \frac{k-1}{k+5} \frac{k-1}{36}$$

$= \frac{8}{36} + 2 \left(\frac{9}{324} + \frac{16}{360} + \frac{25}{396} \right) \approx 0.222 + 2(0.027 + 0.044 + 0.063) \approx 0.49$ donc le jeu de craps n'est pas trop "voleur" car la probabilité pour le joueur de gagner est très peu inférieure à 0.5.

Au sébi par contre, avec la contrainte, le joueur gagne au premier jet s'il fait aussi



10 par 5-5

— Soit G' l'événement "le joueur gagne au premier jet" c'est-à-dire "le joueur fait 7 ou 11 ou 10 par 5-5".

Comme ces 3 événements sont disjoints deux à deux alors la probabilité de G' est :

$$P(G') = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \approx 0.25$$

— Donc $P(G) = P(G') + P(G'') = \frac{9}{36} + 2 \sum_{k=4}^6 \frac{k-1}{k+5} \frac{k-1}{36}$

$$P(G) = \frac{9}{36} + 2 \left(\frac{9}{324} + \frac{16}{360} + \frac{25}{396} \right) \approx 0.25 + 2(0.027 + 0.044 + 0.063) \approx 0.518$$

— **Contrairement au craps, Le jeu du sébi est légèrement favorable à celui qui lance les dés!!!**



8. voici un programme en Turbo-Pascal simulant le jeu du CRAPS.

```
program CRAPS;
uses WinCrt;
type
de : 1..6;
sigma : 2..12;
var
DE1,DE2 : de;
SOMME : Sigma;

procedure GAGNE(x : word);
begin
writeln('Vous avez gagné ', x, 'euros');
end;

procedure PERDU(y : word);
begin
writeln('Vous avez gagné ', y, 'euros');
end;

procedure ONREJOUÉ;
var DE3, DE4 : de; TOTAL : sigma; FINI : boolean;
begin
repeat
randomize;
DE3 := random(6) + 1; writeln('le premier dé marque ', DE3);
DE4 := random(6) + 1; writeln('le premier dé marque ', DE4);
TOTAL := DE3 + DE4;
FINI := (TOTAL = SOMME) or (TOTAL = 7);
until FINI;
if TOTAL = 7 then PERDU(30) else GAGNE (30);
end;

begin(* du programme principal *)
randomize;
DE1 := random(6) + 1;
writeln('le premier dé marque ', DE1);
DE2 := random(6) + 1;
writeln('le premier dé marque ', DE2);
SOMME := DE1 + DE2;
writeln('la somme des deux dés est ', SOMME);
if ((SOMME = 7) or (SOMME = 11))
then GAGNE(15)
else if (((SOMME = 2) or (SOMME = 3)) or (SOMME = 12))
then PERDU(15)
else ONREJOUÉ;
end.
```

9. On peut aussi utiliser une procédure ONREJOUÉ récursive.

```

procedure ONREJOUÉ;
var DE3, DE4 : de; TOTAL : sigma;
begin
  randomize;
  DE3 := random(6) + 1;
  writeln('le premier dé marque ', DE3);
  DE4 := random(6) + 1;
  writeln('le premier dé marque ', DE4);
  TOTAL := DE3 + DE4;
  writeln('la somme des deux dés est ', TOTAL);
  if TOTAL = 7 then PERDU(30)
  else if TOTAL = SOMME
  then GAGNE (30)
  else ON REJOUÉ;
end;

```

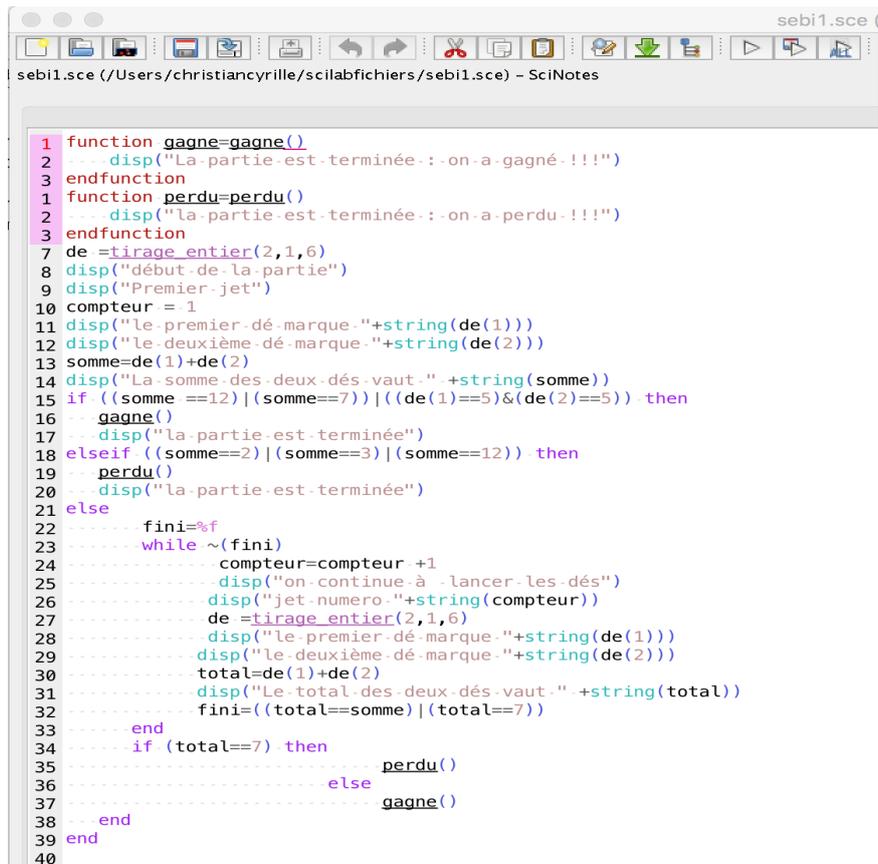
10. Le programme récursif en scilab du sebi en introduisant la contrainte : on gagne aussi au premier jet par 10 en 5 – 5.

```

1 function gagne=gagne()
2   ... disp("La partie est terminée : On a gagné!")
3 endfunction
4 function perdu=perdu()
5   ... disp("La partie est terminée : on a perdu!")
6 endfunction
7 function onrejoue=onrejoue()
8   ... disp("On continue à jouer!")
9   ... de=tirage_entier(2,1,6)
10  ... disp("le premier dé marque " + string(de(1)))
11  ... disp("le deuxième dé marque " + string(de(2)))
12  ... total =de(1)+de(2)
13  ... disp("le nouveau total est " + string(total))
14  ... if total==somme then
15  ...   ... gagne()
16  ... elseif total==7 then
17  ...   ... perdu()
18  ... else
19  ...   ... onrejoue()
20  ... end
21 endfunction
22  ... de=tirage_entier(2,1,6)
23  ... disp("le premier dé marque " + string(de(1)))
24  ... disp("le deuxième dé marque " + string(de(2)))
25  ... somme=de(1)+de(2)
26  ... disp("la somme des deux dés est " + string(somme))
27  ... if (somme==12) | (somme == 7) | ((de(1)==5) & (de(2)==5)) then
28  ...   ... gagne()
29  ... elseif ((somme==2) | (somme==3) | (somme==12)) then
30  ...   ... perdu()
31  ... else
32  ...   ... onrejoue()
33  ... end
34

```

11. Le programme du sèbi dérécursivé avec une boucle while en scilab.



```

1 function gagne=gagne()
2   --- disp("La partie est terminée - on a gagné -!!!")
3 endfunction
1 function perdu=perdu()
2   disp("la partie est terminée - on a perdu -!!!")
3 endfunction
7 de =tirage_entier(2,1,6)
8 disp("début de la partie")
9 disp("Premier jet")
10 compteur = 1
11 disp("le premier dé marque -"+string(de(1)))
12 disp("le deuxième dé marque -"+string(de(2)))
13 somme=de(1)+de(2)
14 disp("La somme des deux dés vaut -" +string(somme))
15 if ((somme ==12)|(somme==7)|((de(1)==5)&(de(2)==5))) then
16   -- gagne()
17   -- disp("la partie est terminée")
18 elseif ((somme==2)|(somme==3)|(somme==12)) -then
19   -- perdu()
20   -- disp("la partie est terminée")
21 else
22   ----- fini=%f
23   ----- while ~(fini)
24   -----   compteur=compteur +1
25   -----   disp("on continue à lancer les dés")
26   -----   disp("jet numero -"+string(compteur))
27   -----   de =tirage_entier(2,1,6)
28   -----   disp("le premier dé marque -"+string(de(1)))
29   -----   disp("le deuxième dé marque -"+string(de(2)))
30   -----   total=de(1)+de(2)
31   -----   disp("Le total des deux dés vaut -" +string(total))
32   -----   fini=((total==somme)|(total==7))
33   ----- end
34   ----- if (total==7) -then
35   -----   ----- perdu()
36   -----   ----- else
37   -----   -----   gagne()
38   ----- end
39 end
40

```