Lois de probabilités discrètes infinies

Christian CYRILLE

24 mars 2019

1 La loi géométrique

1.1 Attente d'un premier événement dans un processus sans mémoire

On lance un dé jusqu'à l'obtention du nombre 6. Soit X le nombre de lancers nécessaires à la réalisation de cet événement.
$X < \Omega >= \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P([X = k]) = (\frac{5}{6})^{k-1}\frac{1}{6}$

1.2 Généralisation

Soit p un nombre réel strictement compris entre 0 et 1.
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ lorsque :
$X < \Omega >= \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P([X = k]) = (1-p)^{k-1}p$
Cette loi correspond au temps d'attente du **premier succès** dans une succession infinie d'épreuves de Bernouilli de paramètre p identiques et indépendantes.

Cette loi géométrique s'appelle aussi Loi de Pascal ou Loi Binomiale Négative avec $n = 1$

1.3 Propriétés

1.3.1 P_1

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P([X=k]) = \sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k = p\frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1$$

1.3.2 P_2

Si X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ alors $E(X) = \frac{1}{p}$

Dém : $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP([X=k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^k$
$= \frac{p}{1-p}\frac{1-p}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$

1.3.3 P_3

> Si X suit une loi géométrique alors $Var(X) = \frac{q}{p^2}$

Dém : $E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2P([X=k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{+\infty} k^2(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty} k^2(1-p)^k$
$= \frac{p}{1-p}\frac{(1-p)(1+(1-p))}{(1-(1-p))^3} = \frac{p}{1-p}\frac{(1-p)(2-p)}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}$
$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$

1.4 Exercices

1.4.1 Exercice 1

Ti Sonson et sa femme Man Tine ont loué une caravane pour remonter la fameuse route 66 aux USA. Pendant que Ti Sonson conduit, Man Tine vaque à ses affaires dans la caravane. Mais Ti Sonson est distrait : quand il s'arrête pour prendre de l'essence avec sa caravane, il y a une chance sur cinq pour qu'il reparte sans sa femme, descendue pour visiter les lieux. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'étapes que Ti Sonson parcourt avec Man Tine.

1. Etablir la loi de probabilité de X puis déterminer $E(X)$
2. Déterminer la fonction de répartition de X
3. Quel est le nombre maximum d'étapes que peut comporter le voyage pour que Man Tine arrive à destination dans la voiture de Ti Sonson avec une probabilité supérieure à $0,6$?

Corrigé :

1. $X < \Omega >= \mathbb{N}^*$ et pour tout entier non nul k ,
   $P((X = k])$ = P(Ti Sonson a fait k étapes avec Man Tine) = P(Ti Sonson est reparti $(k-1)$ fois avec elle et la perd à la k-ième étape) = $(1 - \frac{1}{5})^{k-1}\frac{1}{5} = (\frac{4}{5})^{k-1}\frac{1}{5}$
   X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(\frac{1}{5})$ donc $E(X) = \frac{1}{p} = 5$
2. Pour tout réel x, on a $F_X(x) = P([X \leq x])$. Comme $X < \Omega >= \mathbb{N}^*$ alors F_X est entièrement déterminée par la connaissance des $F_X(k)$ pour tout entier naturel non nul k
   $F_X(k) = P([X \leq k]) = P([X = 1]) + P([X = 2]) + P([X = 3]) + \cdots P([X \leq k]) = \sum_{k=1}^{n} P([X = k])$
   $F_X(k) = \sum_{i=1}^{k}(\frac{4}{5})^{i-1}\frac{1}{5} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{k}(\frac{4}{5})^{i-1} = \frac{1}{5}(\frac{4}{5})^0\frac{1-(\frac{4}{5})^k}{1-\frac{4}{5}} = 1 - (\frac{4}{5})k$
3. Pr(Man Tine arrive à destination dans la voiture de Ti Sonson) $> 0,6$

   $\iff -Pr$(Man Tine arrive à destination dans la voiture de Ti Sonson) $< -0,6$

   $\iff 1 - Pr$(Man Tine arrive à destination dans la voiture de Ti Sonson) $< 1 - 0,6$

   $\iff$ Pr(Man Tine est laissée en chemin) $< 0,4 \iff 1 - (\frac{4}{5})^k < 0,4$
   $\iff 0,6 < (0,8)^k \iff ln(0,6) < ln((0,8)k)$
   $\iff ln(0,6) < k\,ln(0,8) \iff ln(0,6)\,ln(0,8) > k$ car $ln(0,8) < 0$ puisque $0 < 0,8 < 1$.
   Or $\frac{ln(0,6)}{ln(0,8)} \approx 2,28$ donc le nombre maximum d'étapes est 2

1.4.2 Exercice 2

Le Tricheur à l'as de carreau est un tableau peint par Georges de La Tour vers 1636-1638, conservé au Musée du Louvre, et considéré comme l'un des chefs-d'œuvre du peintre et de la peinture française.

Dans un jeu de 32 cartes, on remplace l'as de cœur par l'as de carreau.

1. On tire de ce jeu 4 cartes au hasard. Quelle est la probabilité de déceler la supercherie ?
2. On procède dans ce jeu à des tirages successifs de 4 cartes avec remise. Quel est le nombre minimal n de tirages à effectuer pour déceler la supercherie avec une probabilité d'au moins $0,95$?

Corrigé :

1. On décèle la supercherie lorsque parmi les 4 cartes tirées, il y a les 2 as de carreau.
   - On choisit les 2 as de carreau et cela de $\binom{2}{2}$ façons c'est-à-dire 1 façon.
   - On choisit les 2 autres cartes parmi les 30 autres cartes et ceci de $\binom{30}{2}$ façons
   - Donc le nombre de cas favorables est $\binom{30}{2}$. Comme le nombre de cas possibles est $\binom{32}{4}$

   Alors la probabilité de déceler la supercherie $\dfrac{\binom{30}{2}}{\binom{32}{4}} = \dfrac{435}{35960} = \dfrac{32}{48} \approx 0,12$

2. n est le nombre minimal de tirages à effectuer avant de déceler la supercherie. veut dire que :
   - soit l'on détecte la supercherie au tirage 1 avec une probabilité p
   - soit l'on détecte la supercherie au tirage 2 avec une probabilité $(1-p)p$
   - soit l'on détecte la supercherie au tirage 3 avec une probabilité $(1-p)^2p$
   - $\cdots$
   - soit l'on détecte la supercherie au tirage n avec une probabilité : $(1-p)^{n-1}p$

   donc on doit résoudre l'inéquation :
   $p+(1-p)p+(1-p)^2p+\cdots+(1-p)^{n-1}p \geq 0,95$

   $\iff p(1+(1-p)+(1-p)^2+\cdots+(1-p)^{n-1}) \geq 0,95$

   $\iff p(1\dfrac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}) \geq 0,95 \iff 1-(1-p)^n \geq 0,95 \iff 0,05 \geq (1-p)^n$

   $\iff ln(0,05) \geq ln((1-p)^n) \iff ln(0,05) \geq n\, ln(1-p)$

   $\iff \dfrac{ln(0,05)}{ln(1-p)} \leq n$ car $ln(1-p) \leq 0$ car $0 \leq 1-p \leq 1$ puisque $0 \leq p \leq 1$.

   Or $\dfrac{ln(0,05)}{ln(1-p)} = \dfrac{(ln(0,05)}{ln(\dfrac{245}{248})} \approx 246,146$ donc le nombre minimal de tirages n est 247

1.4.3 Informatique et probabilités - extrait Edhec 2007

On lance une pièce équilibrée (la probabilité d'obtenir "pile" et celle d'obtenir "face" étant toutes égales à $\frac{1}{2}$) et on note Z la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier "pile".
Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur k ($k \in \mathbb{N}^*$), on remplit une urne de k boules numérotées $1, 2, \cdots, k$ puis on extrait au hasard une boule de cette urne.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.

1. On décide de coder l'événement "obtenir un pile" par 1 et l'événement "obtenir un face" par 0.
   On rappelle que la fonction *random* renvoie , pour un argument k de type integer(où k désigne un entier supérieur ou égal à 1) un entier aléatoire compris entre 0 et $k-1$.
   (a) Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il affiche la valeur prise par Z lors de la première partie de l'expérience décrite ci-dessus :

   ```
   Program edhec2007;
     var z, hasard : integer;
   begin
       randomize;
       z:=0;
       repeat
            z := .............;
            hasard := ..................;
       until (hasard = 1);
       writeln(z);
   end.
   ```

   (b) Quelle instruction faut-il rajouter avant la dernière ligne de ce programme pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans ce problème et affiche la valeur prise par la valeur aléatoire X ?
   Vous n'oublierez pas de compléter alors la partie déclarations du programme.
2. Déterminer la loi de Z. Donner alors sans justification son espérance et sa variance.

Corrigé :

1. On décide de coder l'événement "obtenir un pile" par 1 et l'événement "obtenir un face" par 0.
   On rappelle que la fonction *random* renvoie , pour un argument k de type integer(où k désigne un entier supérieur ou égal à 1) un entier aléatoire compris entre 0 et $k-1$.
   (a) Le programme suivant affiche la valeur prise par Z lors de la première partie de l'expérience puis affiche la valeur de X :

```
Program edhec2007;
  var z, hasard : integer;
       x: integer;
begin
    randomize;
    z:=0;
    repeat
         z := z + 1;
         hasard := random(2).;
    until (hasard = 1);
    writeln(z);
    x:= 1 + random(z);
    writeln(x);
end.
```

2. Z suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$ et $Z < \Omega >= \mathbb{N}^*$:
   $\forall k \in \mathbb{N}^*$ on a $P([Z = k] = (1-p)^{k-1}p = (\frac{1}{2})^{k-1}\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^k$.
   Donc $E(Z) = \frac{1}{p} = 2$ et $Var(Z) = \frac{1-p}{p^2} = 2$.

2 La loi de Poisson

" La vie n'est bonne qu'à deux choses : découvrir les mathématiques et enseigner les mathématiques."
Siméon Denis Poisson(1781 - 1840)

2.1 Généralités

Poisson renonce à la carrière médicale à laquelle il était promis pour se tourner vers les mathématiques.
Après Laplace et Condorcet, il va tenter d'appliquer les probabilités aux affaires juridiques.
Il publie en 1837 un mémoire intitulé *"Recherche sur la probabilité des jugements en matière criminelle et matière civile"* dans lequel on trouve la distribution qui porte son nom.
(Sources : Belin TS p. 389)
La loi de Poisson est la loi dite des événements rares c'est-à-dire des événements avec une probabilité faible, par exemple :

- Le nombre de décès occasionnés par les ruades de chevaux
- Le nombre de chèques émis sans provision
- Le nombre de fautes d'impression dans les pages d'un livre
- Le nombre de personnes atteintes d'une maladie
- Le nombre de noyades sur une plage
- Le nombre d'accidents annuels provoqués par un automobiliste assuré
- Le nombre de décès par suicide

Cette loi intervient dans des champs divers et variés : télécommunications, contrôles de qualité en statistiques, biologie, météorologie,...

2.2 Définition

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ lorsque :
$X < \Omega >= \mathbb{N}$ et que $\forall k \in \mathbb{N} \quad P([X = k]) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

2.3 Propriétés

2.3.1 P_1

> $\sum_{k=0}^{+\infty} P([X=k]) = 1$

On a bien $\sum_{k=0}^{+\infty} P([X=k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^0 = 1$

2.3.2 P_2 : Moyenne d'une Poisson

> Si X suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ alors $E(X) = \lambda$

$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP([X=k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{k-1!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$
$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda e^0 = \lambda$

2.3.3 P_3 : Variance d'une Poisson

> Si X suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ alors $Var(X) = \lambda$

$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P([X=k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} (\sum_{k=0}^{+\infty} (k(k-1)+k) \frac{\lambda^k}{k!}) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}$
$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + E(X) = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 e^0 + \lambda = \lambda^2 + \lambda$
d'où $Var(X) = E(X^2) - (E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

2.3.4 P_4 : Somme de Poissons indépendantes

> Si X suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$, Y suit une loi $\mathcal{P}(\mu)$ et X et Y sont **indépendantes** alors $X+Y$ suit une loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$

Soit $k \in \mathbb{N}$. alors $P([X+Y=k] = \sum_{i=0}^{k} P([X=i] \cap [Y=k-i])$.
Or X et Y sont indépendantes donc $P([X=i] \cap [Y=k-i]) = P([X=i])P[Y=k-i])$
Par conséquent,
$P([X+Y=k] = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\mu} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} = e^{-\lambda} e^{-\mu} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda^k \mu^{n-k}$
On a donc $P([X+Y=k] = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^k \mu^{n-k} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}$.
On prouve ainsi que $X+Y$ suit une loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

2.3.5 P_5 : Caractéristiques d'une table de la loi de Poisson

Si X suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ alors $\dfrac{P([X=k])}{P([X=k+1])} = \dfrac{k+1}{\lambda}$
donc l'application $k \mapsto P([X=k])$ croît quand $k+1 < \lambda$ puis décroît dès que $k > \lambda$ donc :

- si λ non entier , $P((X=k])$ est maximale pour $k =$ la partie entière de λ.
- si λ est entier, $P([X=k])$ est maximale pour 2 valeurs de k qui sont $k = \lambda - 1$ et $k = \lambda$

Table de la loi de Poisson

	λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
r	0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
	1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
	2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
	3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
	4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
	5			0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
	6					0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
	7							0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	8										0,0000
	λ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
r	0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
	1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707
	2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707
	3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804
	4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
	5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361
	6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120
	7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009
	9			0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
	10						0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	11									0,0000	0,0000
	λ	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
r	0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
	1	0,1083	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494
	2	0,0053	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240
	3	0,0000	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240
	4	0,0000	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680
	5	0,0000	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008
	6	0,0000	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
	7	0,0000	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188	0,0216
	8	0,0000	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
	9			0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
	10						0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008
	11						0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
	12						0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	13									0,0000	0,0000
	λ	2,5	3	4	4,5	5	5,5	6	7	8	9
r	0	0,0821	0,0498	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
	1	0,2052	0,1494	0,0733	0,0500	0,0337	0,0225	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
	2	0,2565	0,2240	0,1465	0,1125	0,0842	0,0618	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
	3	0,2138	0,2240	0,1954	0,1687	0,1404	0,1133	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
	4	0,1336	0,1680	0,1954	0,1898	0,1755	0,1558	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337
	5	0,0668	0,1008	0,1563	0,1708	0,1755	0,1714	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
	6	0,0278	0,0504	0,1042	0,1281	0,1462	0,1571	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
	7	0,0099	0,0216	0,0595	0,0824	0,1044	0,1234	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
	8	0,0031	0,0081	0,0298	0,0463	0,0653	0,0849	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
	9	0,0009	0,0027	0,0132	0,0232	0,0363	0,0519	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
	10	0,0002	0,0008	0,0053	0,0104	0,0181	0,0285	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
	11	0,0000	0,0002	0,0019	0,0043	0,0082	0,0143	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
	12		0,0001	0,0006	0,0016	0,0034	0,0065	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728
	13		0,0000	0,0002	0,0006	0,0013	0,0028	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504

2.3.6 Convergence de la $\mathcal{B}(n;p)$ vers la $\mathcal{P}(\lambda)$

Lorsque n est suffisamment grand et que p est suffisamment petit alors la $\mathcal{B}(n;p)$ converge en loi vers la $\mathcal{P}(np)$

2.4 Exercices

2.4.1 Réclamations

> Un magasin reçoit 3 réclamations en moyenne par jour. Supposant poissonnienne la loi de survenance de ces réclamations, calculer la probabilité pour que le premier lundi du mois prochain soient enregistrées :
> - 0 réclamation
> - 2 réclamations
> - strictement plus de 4 réclamations

X la loi de survenance des réclamations suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(3)$.
En utilisant une table de la loi de Poisson.

- $Pr(0 \text{ réclamation }) = Pr([X = 0]) = e^{-3}\dfrac{3^0}{0!} \approx 0,0498$
- $Pr(2 \text{ réclamations }) = Pr([X = 2]) = e^{-3}\dfrac{3^2}{2!} \approx 0,2240$
- $Pr(\text{strictement plus de 4 réclamations }) = Pr([X > 4]) = 1 - Pr([X \leq 4]$
  $= 1 - (Pr([X = 0]) + Pr([X = 1]) + Pr([X = 2]) + Pr([X = 3]) + Pr([X = 4]))$
  $= 1 - F_X(4) \approx 0,185$

2.4.2 Décès

> La probabilité pour un français de 32 ans de mourir avant l'âge de 33 ans est de $0,01$. On supposant poissonnienne la loi de décès à cet âge. Sur un groupe de 100 personnes âgées de 32 ans, quelle est la probabilité d'observer :
> - 0 décès avant l'âge de 33 ans
> - 1 décès avant l'âge de 33 ans
> - Strictement plus de 2 décès avant l'âge de 33 ans

$n = 100$ et $p = 0,01$ donc sur 100 personnes la moyenne est $np = 1$.
X la loi de survenance des décès suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.
En utilisant une table de la loi de Poisson.

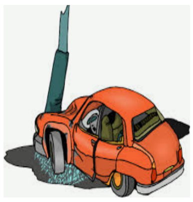
- $Pr(0 \text{ décès }) = Pr([X = 0]) = e^{-1}\dfrac{1^0}{0!} \approx 0,3679$
- $Pr(1 \text{ décès }) = Pr([X = 1]) = e^{-1}\dfrac{1^1}{1!} \approx 0,3679$
- $Pr(\text{strictement plus de 2 décès }) = Pr([X > 2]) = 1 - Pr([X \leq 2]$
  $= 1 - (Pr([X = 0]) + Pr([X = 1]) + Pr([X = 2])))$
  $= 1 - F_X(2) \approx 0,0803$

2.4.3 Réservation aérienne

Un poste de réservation Air Caraïbes reçoit en moyenne $0,7$ demande à la minute. Quelle est la probabilité pour que, entre 13 h 59 et 14 h, il recoive :
- 0 demande
- 1 demande
- plus d'une demande

X la loi de survenance des appels suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(0,7)$.
En utilisant une table de la loi de Poisson.
- $Pr(0 \text{ appel }) = Pr([X=0]) = e^{-0.7}\dfrac{(0.7)^0}{0!} \approx 0,4966$
- $Pr(1 \text{ appel }) = Pr([X=1]) = e^{-0.7}\dfrac{(0.7)^1}{1!} \approx 0,3476$
- $Pr(\text{strictement plus d'un appel }) = Pr([X>1]) = 1 - Pr([X \leq 1]$
  $= 1 - (Pr([X=0]) + Pr([X=1])))$
  $= 1 - F_X(1) \approx 0,1558$

2.4.4 Accidents sur une autoroute



Sur une autoroute, il y a en moyenne un accident par semaine. Une semaine, il y en a 4. Quelle est la probabilité de cet événement ?

X la loi de survenance des accidents suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.
En utilisant une table de la loi de Poisson :
$Pr(\text{ avoir 4 accidents }) = Pr([X=4]) = e^{-1}\dfrac{1^4}{4!} \approx 0,0153.$

2.4.5 La Bataille d'Angleterre

Le statisticien anglais Clark (1905-1989) a divisé Londres en 576 rectangles et compté les chutes de bombes dans ces rectangles durant la $2^{\text{ième}}$ guerre mondiale $1939-1945$. Il a trouvé :

Nombre de bombes	0	1	2	3	4	5
Nombre de rectangles	229	211	93	35	7	1

Calculer la moyenne λ du nombre de bombes par rectangle. Comparer la distribution réelle à la distribution résultant de l'application de la loi de Poisson de paramètre λ.

La moyenne λ du nombre de bombes par rectangle est :

$$\lambda = \frac{229\times 0 + 211\times 1 + 93\times 2 + 35\times 3 + 4\times 7 + 5\times 1}{576} \approx 0,9288$$

Soit X suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(0,9288)$

- $Pr([X=0]) = e^{-0.9288}\dfrac{(0.9288)^0}{0!} \approx 0,3950$ donc $0,3950\times 576 = 227,52 \approx 228$
- $Pr([X=1]) = e^{-0.9288}\dfrac{(0.9288)^1}{1!} \approx 0,3669$ donc $0,3669\times 576 = 211,33 \approx 211$
- $Pr([X=2]) = e^{-0.9288}\dfrac{(0.9288)^2}{2!} \approx 0,1703$ donc $0,1703\times 576 = 98,09 \approx 98$
- $Pr([X=3]) = e^{-0.9288}\dfrac{(0.9288)^3}{3!} \approx 0,0527$ donc $0,0527\times 576 = 30,35 \approx 30$
- $Pr([X=4]) = e^{-0.9288}\dfrac{(0.9288)^4}{4!} \approx 0,0122$ donc $0,0122\times 576 = 7,02 \approx 7$
- $Pr([X=5]) = e^{-0.9288}\dfrac{(0.9288)^5}{5!} \approx 0,0022$ donc $0,0022\times 576 = 1,26 \approx 1$

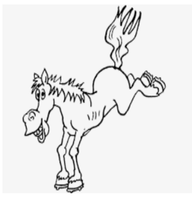
La distribution réelle est la distribution théorique sont proches l'une de l'autre.

2.4.6 Le célèbre exemple de Von Bortkiewicz -(1868-1931)

Le mathématicien russe d'origine polonaise Von Bortkiewicz a étudié le nombre de morts par ruade de cheval dans l'armée prussienne de 1875 à 1894 dans 200 corps de cavalerie : pendant 20 ans, il a étudié 10 corps de cavalerie par an

Nombre de morts par an	0	1	2	3	4
Nombre de corps de cavalerie	109	65	22	3	1

1. Calculer la moyenne λ du nombre de morts par an.
2. Comparer la distribution réelle à la distribution résultant de l'application de la loi de Poisson de paramètre λ.



La moyenne λ du nombre de morts par an est :

$$\lambda = \frac{109 \times 0 + 65 \times 1 + 22 \times 2 + 3 \times 3 + 1 \times 4}{200} \approx 0,61$$

Soit X suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(0,9288)$

- $Pr([X = 0]) = e^{-0,61} \frac{(0,61)^0}{0!} \approx 0,5433$ donc $0,5433 \times 200 = 108,66 \approx 109$
- $Pr([X = 1]) = e^{-0,61} \frac{(0,61)^1}{1!} \approx 0,3314$ donc $0,3314 \times 200 = 66,28 \approx 66$
- $Pr([X = 2]) = e^{-0,61} \frac{(0,61)^2}{2!} \approx 0,1010$ donc $0,1010 \times 200 = 20,2 \approx 20$
- $Pr([X = 3]) = e^{-0.0,61} \frac{(0,61)^3}{3!} \approx 0,0205$ donc $0,0205 \times 200 = 4,1 \approx 4$
- $Pr([X = 4]) = e^{-0.0,61} \frac{(0,61)^4}{4!} \approx 0,0031$ donc $0,0031 \times 200 = 0,62 \approx 1$

La distribution réelle est la distribution théorique sont proches l'une de l'autre.

2.4.7 Exercice - Ecricome 2003

Une entreprise de construction produit des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre.
On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets.
La probabilité qu'un objet construit par la chaîne A soit défectueux est $0,1$ alors que la probabilité qu'un objet construit par la chaîne B soit défectueux est $0,2$

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux.
   Calculer la probabilité de l'événement suivant : "l'objet provient de la chaîne A"
2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par la chaîne A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$
   On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.
   (a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de son espérance et la valeur de sa variance.
   (b) Soient k et n deux entiers naturels. Déterminer la probabilité conditionnelle $P([X = k]/[Y = n])$ dans les deux cas suivants :
      i. $k > n$
      ii. $k \leq n$
   (c) En remarquant que $\Omega = \bigcup_{i=0}^{+\infty} [Y = i]$ puisque la famille $([Y = i])_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements,
   Démontrer que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Corrigé
On note
- D :" l'objet est défectueux"
- A :" l'objet est fabriqué par la chaîne A"
- B :" l'objet est fabriqué par la chaîne B"

On note

1. $P(A/D) = \dfrac{P(A \cap D}{P(D)}$.
   Or $\{A, B\}$ est un système complet d'événements donc
   $P(D) = P(D \cap \Omega) = P(D \cap (A \cup B)) = P((D \cap A) \cup (D \cap B)) =$
   $P(D \cap A) + P(D \cap B)$ car $(D \cap A) \cap (D \cap B) = D \cap A \cap B = D \cap \emptyset = \emptyset$
   Donc $P(D) = P(D/A)P(A) + P(D/B)P(B)$
   Par conséquent $P(A/D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(D/A)P(A)}{P(D/A)P(A) + P(D/B)P(B)} = \dfrac{0,1 \times 0,6}{0,1 \times 0,6 + 0,2 \times 0,4} =$
   $\dfrac{0,06}{0,14} = \dfrac{3}{7}$.
2. (a) Comme Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$ alors :
      - $Y < \Omega >= \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $P([Y = n] = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$
      - son espérance $E(Y) = \lambda = 20$
      - sa variance $Var(Y) = \lambda = 20$

   (b) Soient k et n deux entiers naturels. $P([X = k]/[Y = n])$:

i. Si $k > n$ alors $P([X = k]/[Y = n]) = 0$ car on ne peut avoir plus d'objets défectueux que d'objets produits.

ii. Si $k \leq n$ alors on est en présence d'un schéma de Bernoulli sur la chaîne A avec n objets produits où chaque fois on peut envisager un succès est :"être défectueux" avec une probabilité $0,1$ Donc $P([X = k]/[Y = n]) = \binom{n}{k} (0,1)^k (0,9)^{n-k}$

(c) Comme $\Omega = \bigcup_{i=0}^{+\infty} [Y = i]$ puisque la famille $([Y = i])_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements,

alors $\forall k \in \mathbb{N}$ on a : $P([X = k]) = \sum_{i=0}^{+\infty} P([X = k]/[Y = i])P([Y = i]$

$P([X = k]) = \sum_{i=0}^{k-1} P([X = k]/[Y = i])P([Y = i] + \sum_{i=k}^{+\infty} P([X = k]/[Y = i])P([Y = i]$

$= \sum_{i=k}^{+\infty} P([X = k]/[Y = i])P([Y = i]$

car pour $k > i$ on a $P([X = k]/[Y = i]) = 0$.

Donc $s_N = \sum_{i=k}^{N} P([X = k]/[Y = i])P([Y = i] = \sum_{i=k}^{N} \binom{i}{k} (0,1)^k (0,9)^{i-k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$

$s_N = \sum_{i=k}^{N} \frac{i!}{k!(i-k)!} (0,1)^k (0,9)^{i-k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = \frac{(0,1)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{i=k}^{N} \frac{(0,9)^{i-k}\lambda^i}{(i-k)!}$

$= \frac{(0,1)^k \lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{j=0}^{N-k} \frac{(0,9)^j \lambda^j}{(j)!}$

$= \frac{(0,1\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{j=0}^{N-k} \frac{(0,9\lambda)^j}{(j)!}$

Comme $\lim_{N \mapsto +\infty} \sum_{j=0}^{N-k} \frac{(0,9\lambda)^j}{(j)!} = e^{0,9\lambda}$

alors $P([X = k]) = \lim_{N \mapsto +\infty} s_N = \frac{(0,1\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!} e^{0,9\lambda} = \frac{(0,1\lambda)^k e^{-0,1\lambda}}{k!}$

On en déduit que X suit une loi de Poisson de paramètre $0,1\lambda = 0,1 \times 20 = 2$.