Comparaison de suites

Christian CYRILLE

4 octobre 2019

"Il ne s'agit ni de rire, ni de pleurer mais de comprendre"
Spinoza

On appellera (0) la suite nulle à partir d'un certain rang. Lorsque l'on ne précisera rien sur les suites, elles sont censées être définies pour tout entier $n \geq n_0$.

1 Négligeabilité

1.1 Définition

On dit qu'une suite (u_n) est négligeable devant une suite (v_n) au voisinage de $+\infty$ ce qui s'écrit $u_n = o(v_n)$ et se lit " u_n est un petit o de v_n" lorsqu'il existe une suite (ε_n) telle que $u_n = v_n\varepsilon_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

1.2 Propriétés

1.2.1 P1

$0 = o(v_n)$ quelque soit la suite (v_n)

1.2.2 P2

$u_n = o(1) \iff \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

1.3 Définition équivalente

Lorsqu'à partir d'un certain rang, v_n est non nul :
on dit qu'une suite (u_n) est négligeable devant une suite (v_n) au voisinage de $+\infty$ ce qui s'écrit $u_n = o(v_n)$ et se lit " (u_n) est un petit o de (v_n)" lorsque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$

1.4 Autres Propriétés

1.4.1 P3

Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.

Démonstration :
évidente

1.4.2 P4

$ln(n) = o(n)$

Démonstration :
évidente car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x} = 0$

1.4.3 P5

$n = o(e^n)$

Démonstration :
évidente car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

1.4.4 P6

$n^\alpha = o(e^{\beta n})$ pour tout α réel et tout $\beta > 0$

Démonstration :
grâce à $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0$ pour tout α réel et tout $\beta > 0$

1.4.5 P7

$ln^\alpha(n) = o(n^\beta)$ pour tout α réel et tout $\beta > 0$

Démonstration :
grâce à $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln^\alpha(x)}{x^\beta} = 0$ pour tout α réel et tout $\beta > 0$

1.4.6 P9 - Une hiérarchie à bien connaître

Dans l'ordre croissant de négligeabilité on a

$$exp(-n); \frac{1}{n^2}; \frac{1}{n}; \frac{1}{ln(n)}; 1; ln(n); \sqrt{n}; n; n^2; exp(n)$$

1.4.7 P9

$n^\alpha = o(a^n)$ pour tout α réel et $a > 1$

1.4.8 P10 - 3 négligeabilités classiques

- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall a > 1 \qquad n^\alpha = o(a^n)$
- $\forall \in \mathbb{R} \qquad \dfrac{a^n}{n!} = o(1)$
- $n! = o(n^n)$

- $\rightarrow$ Méthode 1 :
  $\dfrac{n^\alpha}{a^n} = \dfrac{e^{\alpha\ ln(n)}}{e^{n\ ln(a)}} = e^{\alpha\ ln(n) - n\ ln(a)}$
  Donc $\dfrac{n^\alpha}{a^n} = e^{n\left(\alpha\ \frac{ln(n)}{n} - ln(a)\right)}$
  Quand $n \mapsto +\infty$ alors $\dfrac{ln(n)}{n} \mapsto 0$ donc $\alpha\ \dfrac{ln(n)}{n} - ln(a) \mapsto -ln(a) < 0$ car $a > 1$.
  Par conséquent, $n\left(\alpha\ \dfrac{ln(n)}{n} - ln(a)\right) \mapsto -\infty$ donc $e^{n\left(\alpha\ \frac{ln(n)}{n} - ln(a)\right)} \mapsto 0$.
  On a ainsi démontré que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$ donc $n^\alpha = o(a^n)$

  $\rightarrow$ Méthode 2 :
  On peut directement le résultat suivant :
  $lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x} = 0$ pour tout α réel et tout $a > 1$

- $\rightarrow$ **ou bien** $a = 0$

  Alors $\dfrac{a^n}{n!} = \dfrac{0^n}{n!} = 0$ donc $lim_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$.

  $\rightarrow$ **ou bien** $a > 0$
  Soit un entier $k > 2a$ alors $2a < k$ d'où $\dfrac{a}{k} < \dfrac{1}{2}$.
  De même, $k+1 > 2a$ d'où $\dfrac{a}{k+1} < \dfrac{1}{2}$ etc ... $\dfrac{a}{n} < \dfrac{1}{2}$
  Par conséquent, $\dfrac{a^n}{n!} = \left(\dfrac{a}{1}\ \dfrac{a}{2}\cdots\dfrac{a}{k-1}\right)\left(\dfrac{a}{k}\ \dfrac{a}{k+1}\cdots\dfrac{a}{n}\right)$.
  Donc $\dfrac{a^n}{n!} < \dfrac{a^{k-1}}{(k-1)!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-k} = \dfrac{a^{k-1}}{(k-1)!}\left(\dfrac{2^k}{2^n}\right) = \dfrac{a^{k-1}}{(k-1)!}\left(\dfrac{2^{k-1}}{2^{n-1}}\right) = \dfrac{(2a)^{k-1}}{(k-1)!}\ \dfrac{1}{2^{n-1}}$
  On a donc $0 < \dfrac{a^n}{n!} < \dfrac{(2a)^{k-1}}{(k-1)!}\ \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et comme $\lim_{n\mapsto+\infty}\dfrac{(2a)^{k-1}}{(k-1)!}\ \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$
  D'après le théorème d'encadrement par des suites ayant même limite on obtient

  $$lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$$

  $\rightarrow$ **ou bien** $a < 0$
  On revient au cas précédent en travaillant avec $|a|$ qui est strictement positif car $a < 0$ donc $lim_{n\to+\infty}\dfrac{|a|^n}{n!} = 0$ d'où $lim_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$

  Par conséquent $\forall a \in \mathbb{R}$ $\quad \dfrac{a^n}{n!} = o(1)$

- $\dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1}{n}\ \dfrac{2}{n}\ \dfrac{3}{n}\cdots\dfrac{n-1}{n}\ \dfrac{n}{n}$

  Or $\begin{cases} \dfrac{2}{n} \leq 1 \\ \dfrac{3}{n} \leq 1 \\ \vdots \\ \dfrac{n-1}{n} \leq 1 \\ \dfrac{n}{n} \leq 1 \end{cases}$ donc $\dfrac{n!}{n^n} \leq 1$.

  Or $0 < \dfrac{n!}{n^n} \leq \dfrac{1}{n}$ D'après le théorème d'encadrement par des suites ayant même limite on obtient : $lim_{n\to+\infty}\dfrac{n!}{n^n} = 0$.
  Par conséquent on a $n! = o(n^n)$

2 Domination

2.1 Définition

On dit qu'une suite (u_n) est dominée par une suite (v_n) au voisinage de $+\infty$ ce qui s'écrit $u_n = O(v_n)$ et se lit " u_n est un grand O de v_n" lorsque

$$\exists M > 0 \quad \exists n_0 \in N \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n| \leq M|v_n|$$

2.2 Définition équivalente

Une suite (u_n) est dominée par une suite (v_n) au voisinage de $+\infty$ lorsque , à partir d'un certain rang, on a : $u_n = v_n b_n$ où (b_n) est une suite bornée.

2.3 Exemple

$\dfrac{cos(n)}{n^2+1} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

- On sait que $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq cos(x) \leq 1$ donc $cos(n) \leq 1$
- Or $n^2 + 1 > n^2$ donc $\dfrac{1}{n^2+1} < \dfrac{1}{n^2}$
- Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{cos(n)}{n^2+1} < 1 \times \dfrac{1}{n^2}$

3 Equivalence

3.1 Définition

On dit qu'une suite (u_n) est équivalent à une suite (v_n) au voisinage de $+\infty$ ce qui s'écrit $u_n \sim v_n$ lorsqu'il existe une suite (t_n) telle que $u_n = v_n t_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 1$

3.2 Propriétés

3.2.1 P1

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence car :

- elle est réflexive. En effet, $u_n \sim u_n$
- elle est symétrique. En effet, si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$
- elle est transitive. En effet, si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$

3.3 Définition équivalente

Lorsqu'à partir d'un certain rang, v_n est non nul :
on dit qu'une suite $u_n \sim v_n$ au voisinage de $+\infty$ lorsque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$

3.3.1 P2 : Relation entre o et $\sim$

Lorsqu'à partir d'un certain rang, v_n est non nul alors :
on a l'équivalence logique suivante :

$$u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n = o(v_n)$$

Démonstration :
$\Longrightarrow$:
supposons que $u_n \sim v_n$ alors à partir d'un certain rang l'on a $v_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. Or $\dfrac{u_n - v_n}{v_n} = \dfrac{u_n}{v_n} - 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n - v_n}{v_n} = 0$. Par conséquent, $u_n - v_n = o(v_n)$.
$\Longleftarrow$:
si $u_n - v_n = o(v_n)$ alors comme à partir d'un certain rang l'on a $v_n \neq 0$ on aura donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n - v_n}{v_n} = 0$. Comme $\dfrac{u_n - v_n}{v_n} = \dfrac{u_n}{v_n} - 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ donc $u_n \sim v_n$.

3.3.2 P3

- Si $u_n \sim v_n$
- Si $w_n \sim t_n$
- Alors $u_n w_n \sim v_n t_n$

3.3.3 P4

- Si $u_n \sim v_n$
- Si $w_n \sim t_n$
- Si w_n et t_n ne s'annulent pas à partir d'un certain rang
- Alors $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{t_n}$

3.3.4 P5

- Si $u_n \sim v_n$
- Si u_n est positive à partir d'un certain rang
- Alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ pour tout réel α

3.3.5 P6

Si $u_n \sim v_n$ alors $| u_n | \sim | v_n |$

3.3.6 P7

Si u_n est l'image de n par une fonction polynômiale de degré d c'est-à-dire que si $u_n = \sum_{k=0}^{d} a_k n^k$ alors

$$u_n \sim a_d n^d$$

le terme de plus haut degré.

Démonstration :
$u_n = \sum_{k=0}^{d} a_k n^k = a_d n^d \left[1 + \frac{a_{d-1}}{a_d n} + \frac{a_{d-2}}{a_d n^2} + \frac{a_{d-3}}{a_d n^3} + \cdots + \frac{a_1}{a_d n^{d-1}} + \frac{a_0}{a_d n^d}\right]$.
Par conséquent, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} a_d n^d$ car la limite de l'expression située entre crochets est 1 puisque la limite de chacun des quotients qui s'y trouve est 0.

3.3.7 P8

Si u_n est l'image de n par une fonction rationnelle c'est-à-dire que si $u_n = \frac{\sum_{i=0}^{d} a_i n^i}{\sum_{j=0}^{q} b_j n^j}$ alors

$$u_n \sim \frac{a_d n^d}{b_q n^q}$$

le rapport des termes de plus haut degré.

Démonstration :

$$u_n = \frac{\sum_{i=0}^{d} a_i n^i}{\sum_{j=0}^{q} b_j n^j} = \frac{a_d n^d \left[1 + \frac{a_{d-1}}{a_d n} + \frac{a_{d-2}}{a_d n^2} + \frac{a_{d-3}}{a_d n^3} + \cdots + \frac{a_1}{a_d n^{d-1}} + \frac{a_0}{a_d n^d}\right]}{b_q n^q \left[1 + \frac{b_{q-1}}{b_q n} + \frac{b_{q-2}}{b_q n^2} + \frac{b_{q-3}}{b_q n^3} + \cdots + \frac{b_1}{b_q n^{q-1}} + \frac{b_0}{b_q n^q}\right]}.$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{a_d n^d}{b_q n^q}$ car la limite des deux expressions situées entre crochets est 1 puisque la limite de chacun des quotients qui s'y trouve est 0.

3.3.8 P9

Si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = L$ alors $u_n \sim L$

3.3.9 P10

Si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = 0$ alors

- $ln(1+u_n) \sim u_n$
- $exp(u_n) - 1 \sim u_n$
- $sin(u_n) \sim u_n$
- $tan(u_n) \sim u_n$
- $1 - cos(u_n) \sim \frac{1}{2}u_n^2$
- $cos(u_n) \sim 1$

3.3.10 P11

La relation d'équivalence n'est pas compatible avec l'addition ou la soustraction :
c'est-à-dire que si $u_n \sim v_n$ et si $w_n \sim t_n$
alors **on n'a pas forcément** $u_n + w_n \sim v_n + t_n$.
Contre-exemple :
$n^2 + n \sim n^2$ et $-n^2 + 1 \sim -n^2$ mais $n^2 + n - n^2 + 1 = n + 1$ n'est pas équivalent à $n^2 - n^2 = 0$

3.3.11 P12

(u_n) s'annulant à partir d'un certain rang $\iff u_n \sim 0$

3.3.12 P13

$u_n \sim v_n$ et u_n et v_n **positifs à partir d'un certain rang**
n'implique pas $ln(u_n) \sim ln(v_n)$

Contre-exemple :
$1 + \frac{1}{n} \sim 1 + \frac{1}{n^2}$ car $1 + \frac{1}{n} \sim 1$ et $1 + \frac{1}{n^2} \sim 1$
mais $ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ n'est pas équivalent à $ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$
car $ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ et $ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n}$ n'est pas équivalent à $\frac{1}{n^2}$
puisque $\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n} = n$ ne tend pas vers 1 quand $n \mapsto +\infty$

3.3.13 P14

Par contre, si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = L \neq 1$ et si $u_n \sim v_n$ alors $ln(u_n) \sim ln(v_n)$

démonstration :

$$\frac{ln(u_n)}{ln(v_n)} - 1 = \frac{ln(u_n) - ln(v_n)}{ln(v_n)} = \frac{ln\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)}{ln(v_n)} = \frac{N}{D}.$$

Comme $u_n \sim v_n$ quand $n \mapsto +\infty$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} \mapsto 1$ donc $N \mapsto ln(1)$.
Or $D \mapsto ln(L) \neq 0$ car $L \neq 1$.
Donc $\dfrac{N}{D} \mapsto 0$ donc $\dfrac{ln(u_n)}{ln(v_n)} \mapsto 1$. CQFD.

3.3.14 P15

$u_n \sim v_n$ **n'implique pas** $exp(u_n) \sim exp(v_n)$

Contre exemple :
$n^2 + n \sim n^2$ mais $\dfrac{exp(n^2+n)}{exp(n^2)} = \dfrac{exp(n^2)exp(n)}{exp(n^2)} = exp(n)$ ne tend pas vers 1

Mais si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = L < +\infty$ et si $u_n \sim v_n$ alors $exp(u_n) \sim exp(v_n)$

démonstration :
comme $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} e^{u_n} = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} e^{v_n} = e^L$ alors $exp(u_n) \sim e^L$ et $e^L \sim exp(v_n)$ donc $exp(u_n) \sim exp(v_n)$. CQFD

3.3.15 P16

1 Si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$ alors pour tout réel α l'on a : $(1+u_n)^\alpha \sim 1 + \alpha u_n$

2 En particulier pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$
Si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$ et $1 + u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang
alors $\sqrt{1+u_n} \sim 1 + \dfrac{1}{2}u_n$

3 En particulier pour $\alpha = -1$
Si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$ alors et $1 + u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang
alors $\dfrac{1}{1+u_n} \sim 1 - u_n$

4 Exercices

4.1

Préliminaire : On rappelle que si (u_n) est une suite réelle alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = a$ signifie que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n - a| < \varepsilon$$

On en déduit que si (u_n) est une suite réelle convergente de limite strictement positive a alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n > \frac{a}{2}$$

Ce résultat pourra être admis par la suite.
On considère f la fonction numérique de la variable réelle définie par $f(x) = x(1-x)$.
On considère aussi la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 \in]0;1[$ et par la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1 Etudier les variations de f.

2 **a.** Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n < \dfrac{1}{n+1}$

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = n\ u_n$

i. Démontrer que (v_n) est une suite croissante.

ii. En déduire qu'elle converge et que sa limite $l \in]0;1[$

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$

a. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = v_n(1 - u_n - v_n)$

b. En déduire que la suite (w_n) converge et que sa limite vaut $l(1-l)$

4 Dans cette question, on suppose que $l \neq 1$.

a. Démontrer en utilisant le préliminaire que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad v_{n+1} - v_n \geq \frac{l(1-l)}{2n}$$

b. En déduire que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = +\infty$

5 Conclure à une contradiction entre le résultat précédent et celui obtenu à la question 2 et en déduire que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$