Intégrales Généralisées

Christian CYRILLE

5 octobre 2018

"L'homme, cet arrière-neveu du limaçon qui rêva de justice et inventa le calcul intégral."
Jean Rostand

Table des matières

Chapitre 1

Intégrales impropres

1.1 Rappels sur les Intégrales propres

Si f est continue ou continue par morceaux sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(t)\ dt$ existe.

On parle alors d'**intégrale propre**.

Plusieurs méthodes sont utilisées pour calculer $\int_a^b f(t)\ dt$:

1. **La primitivation :**
   Si f est continue sur $[a;b]$ avec $a \leq b$ alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$.
   On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ le nombre $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a;b]$.
   On écrit
   $$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$
2. **L'intégration par parties :**
   Si u et v sont des fonctions de classe C^1 sur $[a;b]$ avec $a \leq b$
   Alors $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$
   Cette technique est intéressante lorsque f est le produit d'une fonction ln ou exp ou sin ou cos par une fonction polynômiale.
   Si cette fonction polynômiale est de degré n, alors n intégrations par parties sont nécessaires.
3. **Le changement de variable :**

   — si f continue sur $[a;b]$ telle que
   $$\begin{array}{cccc} f: & [a;b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \rightarrow & f(t) \end{array}$$
   — Si ϕ une application de classe C^1 sur $[\alpha;\beta]$ telle que :$[\phi(\alpha);\phi(\beta)] \subset [a;b]$.
   $$\begin{array}{cccc} \phi: & [\alpha;\beta] & \rightarrow & [\phi(\alpha);\phi(\beta)] \subset [a;b] \\ & u & \rightarrow & \phi(u) \end{array}$$
   — alors si l'on pose $t = \phi(u)$ on a : $dt = \phi'(u)du$ et $\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(u))\phi'(u)du$

1.2 Intervalles non bornés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie munie d'une norme $\| \quad \|$(en général $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1.2.1 Définition de la locale intégrabilité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans E.
f est dite localement intégrable si f est intégrable sur tout intervalle $[\alpha; \beta]$ inclus dans I
c'est-à-dire $\forall \alpha \in I \quad \forall \beta \in I \quad \int_\alpha^\beta f(t)dt$ existe.

1.2.2 Intervalle semi ouvert $[a; b[$

Si f est continue par morceaux sur $I = [a; b[$ où $-\infty < a < b \leq +\infty$ et à valeurs dans E,
on dira que $\int_a^b f(t)\ dt$ existe ou est convergente si $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x f(t)\ dt$ existe.
On note alors cette limite : $\int_a^b f(t)\ dt$ et on dit alors que l'intégrale $\int_a^b f(t)\ dt$ est **impropre ou généralisée**.

Propriété

Grâce à la relation de Michel Chasles, $\int_a^b f(t)\ dt$ converge $\iff \forall c \in [a; b[\quad \int_c^b f(t)\ dt$ converge.
Dans ce cas, $\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt$

Queue ou reste d'une intégrale impropre

L'application définie sur $[a; b[$ par $x \mapsto \int_x^b f(t)/dt$ est appelée reste ou queue de l'intégrale impropre.
Lorsque l'intégrale impropre converge, cette intégrale tend vers 0 quand $x \mapsto b$.

Critère de Cauchy

$\int_a^b f(t)\ dt$ converge $\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists c \in [a; b[\quad \forall (x, y) \in]c; b[^2 \quad \| \int_x^y f(t)\ dt \| < \varepsilon$

Opérations algébriques standards

1. Si $\int_a^b f(t)\ dt$ et $\int_a^b g(t)\ dt$ convergent alors $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\ dt$ converge et $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\ dt = \lambda \int_a^b f(t)\ dt + \mu \int_a^b g(t)\ dt$
2. Si $\phi \in \mathcal{L}(E)$ et $\int_a^b f(t)\ dt$ converge alors $\int_a^b (\phi \circ f)(t)\ dt$ converge et $\int_a^b (\phi \circ f)(t)\ dt = \phi \left(\int_a^b f(t)\ dt \right)$

1.2.3 Intervalle semi ouvert $]a;b]$

Si f est continue par morceaux sur $I=]a;b]$ où $-\infty < a < b \leq +\infty$ et à valeurs dans E, on dira que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ existe ou est convergente si $\displaystyle\lim_{x\to a}\int_x^b f(t)dt$ existe.
On note alors cette limite : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et on dit alors que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est impropre.
On a alors les mêmes propriétés que pour les intégrales sur un intervalle du type $[a;b[$.

1.2.4 Intervalle ouvert $]a;b[$

Si f est continue par morceaux sur $I=]a;b[$ où $-\infty < a < b \leq +\infty$ et à valeurs dans E, on dira que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ existe ou est convergente si $\forall c\in]a;b[$ on a les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\ dt$ qui convergent.
Dans ce cas, $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt + \int_a^c f(t)\ dt$.
L'étude d'une intégrale sur un intervalle ouvert est toujours à décomposer en deux études : l'une en la borne inférieure, l'autre en la borne supérieure.

1.2.5 Exemple

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}$ est divergente.

Démonstration

Soit $b>1$ alors $\displaystyle\int_1^b\frac{dt}{t} = [ln(\mid t\mid)]_1^b = ln(b)-ln(1)=ln(b)$. Or $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} ln(b)=+\infty$
donc $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dt}{t}=+\infty$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}$ diverge.

1.2.6 Exemple

$\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{t}$ est divergente.

Démonstration

Soit $a>0$ alors $\displaystyle\int_a^1\frac{dt}{t} = [ln(\mid t\mid)]_a^1 = ln(1)-ln(a)=-ln(a)$. Or $\displaystyle\lim_{a\to 0} -ln(a)=+\infty$
donc $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^1\frac{dt}{t}=+\infty$ donc $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{t}$ diverge.

1.2.7 Exemple

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente.

Démonstration

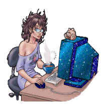
$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est une intégrale impropre en $+\infty$.
Soit $b>0$ alors $\displaystyle\int_0^b e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^b = -e^{-b}+e^{-0} = -e^{-b}+1$. Or $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{-b}=0$
donc $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-t}dt=1$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge vers 1. On écrira alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt=1$

1.2.8 Intégrales de Riemann

1. — Si $\alpha = 1$ alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge
   — Si $0 < \alpha < 1$ alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge
   — Si $\alpha > 1$ alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge vers $\displaystyle\frac{1}{\alpha - 1}$
2. — Si $\alpha < 1$ alors $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge vers $\displaystyle\frac{1}{1 - \alpha}$
   — Si $\alpha > 1$ alors $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge
   — Si $\alpha = 1$ alors $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge

Démonstration

1. — **Si** $\alpha = 1$ alors
   Soit $b > 1$ alors $\displaystyle\int_1^{b} \frac{dt}{t} = [ln(\mid t \mid)]_1^b = ln(b) - ln(1) = ln(b)$. Or $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} ln(b) = +\infty$
   donc $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{dt}{t} = +\infty$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge.
   — Soit $b > 1$ alors $\displaystyle\int_1^{b} \frac{dt}{t^\alpha} = \int_1^b t^{-\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^b = \frac{1}{-\alpha+1}(b^{-\alpha+1} - 1)$.
     — **Si** $0 < \alpha < 1$ alors $1 - \alpha > 0$ donc $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} b^{-\alpha+1} = +\infty$
       donc $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{dt}{t^\alpha}dt = +\infty$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge
     — **Si** $\alpha > 1$ alors $1 - \alpha < 0$ donc $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} b^{-\alpha+1} = 0$
       donc $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{dt}{t^\alpha}dt = \frac{1}{\alpha - 1}$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}dt$ converge vers $\displaystyle\frac{1}{\alpha-1}$
2. Soit $a > 0$ alors $\displaystyle\int_a^{1} \frac{dt}{t^\alpha}dt = \int_a^1 t^{-\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^1 = \frac{1}{-\alpha+1}(1 - a^{1-\alpha})$.
   — Si $\alpha < 1$ alors $1 - \alpha > 0$ donc $\displaystyle\lim_{a\to 0} a^{1-\alpha} = 0$ donc $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t^\alpha}dt$ converge vers $\displaystyle\frac{1}{1-\alpha}$
   — Si $\alpha > 1$ alors $1 - \alpha < 0$ donc $\displaystyle\lim_{a\to 0} a^{1-\alpha} = +\infty$ donc $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t^\alpha}dt$ diverge



1.2.9 Intégrales de Bertrand

$\displaystyle\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(ln(x))^{\beta}}$ converge $\Longleftrightarrow \alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

Démonstration

1.2.10 Intégrales faussement impropres

1. (a) Si $f \in \mathcal{C}(]a;b])$
   (b) Si $\lim\limits_{t\mapsto a^+} f(t)$ est finie.

   Alors on peut prolonger f par continuité en $\tilde{f}$ sur $[a\ ;\ b]$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b \tilde{f}(t)\ dt$ converge.

   On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est faussement impropre ou faussement généralisée
2. (a) Si $f \in \mathcal{C}([a;b[)$
   (b) Si $\lim\limits_{t\mapsto b^-} f(t)$ est finie.

   Alors on peut prolonger f par continuité en $\tilde{f}$ sur $[a\ ;\ b]$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b \tilde{f}(t)\ dt$ converge.

   On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est faussement impropre ou faussement généralisée.
3. (a) Si $f \in \mathcal{C}(]a;b[)$
   (b) Si $\lim\limits_{t\mapsto a^+} f(t)$ est finie.
   (c) Si $\lim\limits_{t\mapsto b^-} f(t)$ est finie.

   Alors on peut prolonger f par continuité en $\tilde{f}$ sur $[a\ ;\ b]$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b \tilde{f}(t)\ dt$ converge.

   On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est faussement impropre ou faussement généralisée.

Exemple 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que $\displaystyle\lim_{t\mapsto 0^+} \frac{sin(2nt)}{tan(t)} = 2n.$
2. Démontrer que $\displaystyle\lim_{t\mapsto \frac{\pi}{2}^-} \frac{sin(2nt)}{tan(t)} = 0.$
3. En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2nt)}{tan(t)}\ dt$ converge.

1. (a) Comme $\displaystyle\lim_{t\mapsto 0} \frac{sin(t)}{t} = 1$ alors $\displaystyle\lim_{t\mapsto 0^+} \frac{sin(2nt)}{2nt} = 1$
   (b) On sait que $\displaystyle\lim_{t\mapsto 0} \frac{tan(t)}{t} = 1$
   (c) Comme $\displaystyle\frac{sin(2nt)}{tan(t)} = \frac{\frac{sin(2nt)}{t}}{\frac{tan(t)}{t}} = \frac{2n\frac{sin(2nt)}{2nt}}{\frac{tan(t)}{t}}$

   alors $\displaystyle\lim_{t\mapsto 0^+} \frac{sin(2nt)}{tan(t)} = 2n.$
2. (a) Quand $t \mapsto \dfrac{\pi}{2}$ alors $2nt \mapsto n\pi$ d'où $sin(2nt) \mapsto 0$
   (b) Quand $t \mapsto \dfrac{\pi}{2}^-$ alors $tan(t) \mapsto +\infty$ d'où $\dfrac{1}{tan(t)} \mapsto 0$

   alors $\displaystyle\lim_{t\mapsto \frac{\pi}{2}^-} \frac{sin(2nt)}{tan(t)} = 0.$
3. La fonction f définie par $f(t) = \dfrac{sin(2nt)}{tan(t)}$ est continue sur $]0; +\dfrac{\pi}{2}[$ et admet des limites finies aux bornes de cet intervalle donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2nt)}{tan(t)}\ dt$ converge.

Exemple 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que $\lim_{t \mapsto 0^+} \frac{sin(2nt)}{t} = 2n$.
2. Démontrer que l'intégrale impropre $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2nt)}{t}\, dt$ converge.
3. En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(t)}{t}\, dt$ converge.

1. (a) Comme $\lim_{t \mapsto 0} \frac{sin(t)}{t} = 1$ alors $\lim_{t \mapsto 0^+} \frac{sin(2nt)}{2nt} = 1$

   (b) Or $\frac{sin(2nt)}{t} = 2n\frac{sin(2nt)}{2nt}$

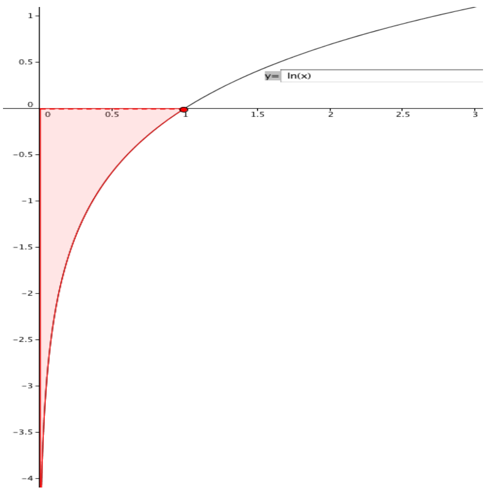
   donc $\lim_{t \mapsto 0^+} \frac{sin(2nt)}{t} = 2n$.
2. La fonction f définie par $f(t) = \frac{sin(2nt)}{t}$ est continue sur $]0; +\frac{\pi}{2}]$ et admet une limite finie en 0 donc l'intégrale impropre $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2nt)}{t}\, dt$ converge.
3. En prenant $n = 1$ on en déduit que l'intégrale impropre $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(t)}{t}\, dt$ converge.

1.3 Fonctions non bornées

1.3.1 Exemple

Etudions la convergence de $\int_0^1 ln(t)dt$.
Cette intégrale est impropre en 0 car $\lim_{t\to 0} ln(t) = -\infty$.
Si $a > 0$ alors $\int_a^1 ln(t)dt = [t\ ln(t) - t]_a^1 = 1\ ln(1) - 1 - (a\ ln(a) - a) = -1 - a\ ln(a) + a$.
Or $\lim_{a\to 0^+} a\ ln(a) = 0$ donc $\lim_{t\to 0^+} \int_a^1 ln(t)dt = -1$. Par conséquent $\int_0^1 ln(t)dt = -1$

Par conséquent, l'aire dessinée ci-dessous vaut 1



1.4 Remarques

1.4.1

1. Si f est continue sur $[a; +\infty[$
2. Si $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ existe et est non nulle

alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

1.4.2

Mais on peut aussi avoir f est continue sur $[a; +\infty[$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge : exemple , l'intégrale de Rienmann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$

1.4.3

1. Si f est continue sur $]a; b]$
2. Si $\lim_{t\to a^+} f(t)$ existe et est finie

alors on peut prolonger continûment f sur $[a; b]$ et $\int_a^b f(t)dt$ converge.
On parle alors d'**intégrale faussement impropre**.

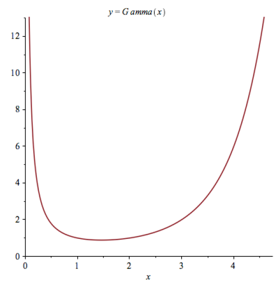
1.5 La fonction eulérienne Γ

1.5.1 Définition

On appelle $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$ pour $Re(z) > 0$

1.5.2 Cas de $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ pour $x \in \mathbb{R}$

1. $\Gamma(x)$ converge si $x > 0$ donc l'ensemble de définition de $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ est $]0; +\infty[$
2. Si $x > 0$ alors $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $\Gamma(n) = (n-1)!$



Démonstration :

1. Cherchons à prouver que $\displaystyle\int_a^b e^{-t}t^{x-1}dt$ a une limite finie quand a tend vers 0 et b tend vers $+\infty$ ou encore que les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ sont convergentes
   — lorsque $t > 0$ alors $e^{-t} \leq 1$ donc $e^{-t}t^{x-1} \leq t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$.
   Or d'après les règles sur les intégrales de Rienmann l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$ est convergente car $1-x < 1$ puisque $x > 0$.
   Par conséquent, $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ converge.
   — $\lim_{t\to+\infty} t^2e^{-t}t^{x-1} = \lim_{t\to+\infty} e^{-t}t^{x+1} = \lim_{t\to+\infty} \dfrac{t^{x+1}}{e^t} = 0$.
   Par conséquent, $\forall\varepsilon > 0 \qquad t^2e^{-t}t^{x-1} \leq \varepsilon$ donc $e^{-t}t^{x-1} \leq \dfrac{\varepsilon}{t^2}$.
   Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ est convergente.
2. Les fonctions u et v définies par $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = t^x$ sont toutes deux de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ donc on peut intégrer par parties $\displaystyle\int_a^b e^{-t}t^x dt$
   Alors $\displaystyle\int_a^b e^{-t}t^x dt = \left[-e^{-t}t^x\right]_a^b - \int_a^b (-e^{-t})xt^{x-1}dt = \left[-e^{-t}t^x\right]_a^b + x\int_a^b e^{-t}\ t^{x-1}dt$.
   Comme $\lim_{t\to0} e^{-t}t^x = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} e^{-t}t^x = 0$ alors $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
3. On prend $x = n-1$ alors $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots (n-1)!\ \Gamma(1) = (n-1)!$
   car $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{b\to+\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^b = 1$

1.6 La fonction eulérienne β

1.7 Exercices

"Celui qui combat peut perdre, mais celui qui ne combat pas a déjà perdu"
Bertholt Brecht

1.7.1

Soit un réel $\varepsilon > 0$. Soit la suite (I_n) d'intégrales définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_\varepsilon^e (ln(x))^n dx$

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Calculer I_0 puis $\lim\limits_{\varepsilon \mapsto 0} I_0$.

   Que peut-on dire de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^e (ln(x))^0 dx$?
3. Calculer I_1 puis $\lim\limits_{\varepsilon \mapsto 0} I_1$

   Que peut-on dire de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^e (ln(x)) dx$?
4. En utilisant une intégration par parties, déterminer la relation existant entre I_n et I_{n-1} pour tout entier $n > 0$

Corrigé

Soit la suite (I_n) d'intégrales définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_\varepsilon^e (ln(x))^n dx$

1. I_n existe car la fonction $x \mapsto (ln(x))^n$ est continue sur l'intervalle $[\varepsilon; e]$ car elle est continue sur $]0; +\infty[$.
2. (a) $I_0 = \displaystyle\int_\varepsilon^e (ln(x))^0 \ dx = \int_\varepsilon^e 1 \ dx = [x]_\varepsilon^e = e - \varepsilon$

   (b) $\lim\limits_{\varepsilon \mapsto 0} I_0 = \lim\limits_{\varepsilon \mapsto 0} (e - \varepsilon) = e$.

   (c) donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^e (ln(x))^0 dx$ converge vers e
3. (a) $I_1 = \displaystyle\int_\varepsilon^e ln(x) \ dx = [x \ \ln(x) - x]_\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon \ \ln(\varepsilon)$

   (b) $\lim\limits_{\varepsilon \mapsto 0} I_1 = \lim\limits_{\varepsilon \mapsto 0} (\varepsilon - \varepsilon \ \ln(\varepsilon)) = 0$ car $\lim\limits_{x \mapsto 0} x \ \ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0} x = 0$

   (c) donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^e (ln(x)) dx$ converge vers 0
4. on pose

$$\begin{cases} u(x) = (\ln(x))^n \quad \text{donc} \quad u'(x) = n\dfrac{1}{x}(\ln(x))^{n-1} \\ v'(x) = 1 \quad \text{en choisissant} \quad v(x) = x \end{cases}$$

   u et v sont de classe C^1 sur $[0; 1]$ donc on peut y intégrer par parties :

   $I_n = [x \ (\ln(x))^{n-1}]_\varepsilon^e - \displaystyle\int_\varepsilon^e n(\ln(x))^{n-1} \ dx = [x \ (\ln(x))^{n-1}]_\varepsilon^e - nI_{n-1} = e - \varepsilon \ (\ln(\varepsilon))^{n-1} - nI_{n-1}$

   Donc $\boxed{I_n = e - \varepsilon \ (\ln(\varepsilon))^{n-1} - nI_{n-1}}$

1.7.2 Exercice -E3a-11-PCb - Concours National Marocain 18

1. Démontrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ dt$ converge
2. Démontrer que $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt$ converge
3. Démontrer que $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\ du$ converge.

Corrigé

1. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est une intégrale impropre en $+\infty$.
   Soit $b > 0$ alors $\displaystyle\int_0^{b} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^b = -e^{-b} + e^{-0} = -e^{-b} + 1$. Or $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{-b} = 0$
   donc $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} e^{-t}dt = 1$ donc $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$
2. $\dfrac{e^{-t^2}}{e^{-t}} = e^{-t^2+t} = e^{-t(t-1)} \mapsto 0$ quand $t \mapsto +\infty$ donc e^{-t^2} est négligeable devant e^{-t} au voisinage de $+\infty$.
   Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge donc $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt$ converge
3. — **Méthode 1 :**
   On effectue un changement de variable, $t = \sqrt{u}$ alors $t^2 = u$ et $2t\ dt = du$.
   L'application $u \mapsto u^2 = t$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $]0; +\infty[$ sur $]0; +\infty[$.
   $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\ du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t}\ 2t\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt = \frac{1}{2}J.$
   Par conséquent, $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\ du$ converge.

   — **Méthode 2 :**
   - — Posons $f(u) = \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$
   - — Quand $u \mapsto 0\quad f(u) \sim \dfrac{1}{\sqrt{u}}$. Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\ du$ converge car c'est une intégrale de Riemann de la forme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{u^\alpha}\ du$ avec $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\displaystyle\int_0^1 f(u)\ du$ converge.
   - — Quand $u \mapsto +\infty\quad f(u) = o(e^{-u})$ car $\displaystyle\lim_{u\mapsto+\infty} \frac{f(u)}{e^{-u}} = \lim_{u\mapsto+\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} = 0$.
     Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-u}\ du$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(u)\ du$ converge.
   - — Comme $\displaystyle\int_0^1 f(u)\ du$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(u)\ du$ converge alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\ du$ converge donc f est intégrable sur $]0; +\infty[$

Culture générale : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\ du = \sqrt{\pi}}$

1.7.3 Exercice

Corrigé

1.7.4 Exercice

Corrigé

1.7.5 Exercice

Corrigé

Chapitre 2

Convergence absolue d'intégrales impropres

2.1 Règle d'Abel

2.1.1 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt$ converge

Démonstration

intégration par parties ou Règle d'Abel.

2.1.2 Intégrales de Fresnel

$\displaystyle\int_0^{+\infty} cos^2(t)dt$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} sin^2(t)dt$ converge

2.1.3 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}(1+\frac{sin(t)}{ln(t)})dt$ diverge

Soit $f(t) = \dfrac{sin(t)}{t}$ et $g(t) = 1+\dfrac{sin(t)}{ln(t)}$. Bien que $f(t) \sim g(t)$ et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt$ converge. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}(1+\frac{sin(t)}{ln(t)})dt$ diverge . En effet ici, $f(t)$ et $g(t)$ n'ont pas le même signe.

2.1.4 Intégrale de Dirichlet

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt = \int_0^1 \frac{sin(t)}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{sin(t)}{t} dt$ existe car $t \mapsto \dfrac{sin(t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0

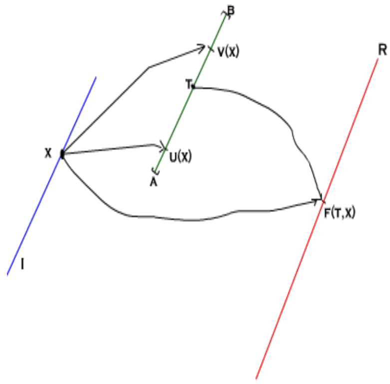
Chapitre 3

Intégrales dépendant d'un paramètre

3.1 Intégrales propres

3.1.1 Condition suffisante de continuité

Soit l'application $f : [a, b] \times I \mapsto \mathbb{R}$ qui à $(t, x) \mapsto f(t, x)$.



1. Si f est continue en tout (t, x) de $[a, b] \times I$
2. Si u et v sont continues sur I et à valeurs dans $[a; b]$
3. Alors $F : x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t, x)dt$ est continue sur I.

Attention, il faut la continuité globale de f par rapport à (t, x) et non la continuité séparée par rapport à t et par rapport à x

Corollaire

1. Si f est continue en tout (t, x) de $[a, b] \times I$
2. Si $u(x) = a$ et $v(x) = b$
3. Alors $F : x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t, x)dt$ est continue sur I.

3.1.2 Condition suffisante de dérivabilité

1. Si f est continue en tout (t, x) de $[a, b] \times I$
2. si $x \mapsto \dfrac{\delta f}{\delta x}(t, x)$ existe et est continue sur I
3. Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et à valeurs dans $[a; b]$
4. Alors $F : x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t, x)dt$ est dérivable sur I

   Sa dérivée est $x \mapsto v'(x)f(v(x), x) - u'(x)f(u(x), x) + \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\delta f}{\delta x}(t, x)dt$

3.2 Intégrales impropres

3.2.1 Exercices