Calcul propositionnel

Professeur Christian CYRILLE

18 novembre 2019

"Quand la notion d'infini cessera-t-elle dépasser les bornes ?."
Raymond DEVOS

1 Qu'est ce que la Mathématique ?

La Mathématique (*du grec mathéma : savoir*) est une science exacte, constituée par un ensemble de théories.
Dans une théorie mathématique, on étudie les relations entre des objets concrets (population, quantité d'argent, ...) ou abstraits(nombres réels, médiatrices,...). Pour construire une théorie mathématique cohérente, il faut réunir trois éléments essentiels : un langage, des règles logiques, des axiomes. On y utilise :

- des **axiomes** qui sont des résultats admis comme vrais (Axiome d'Euclide, Axiome du choix,...)
- un langage c'est-à-dire un vocabulaire et une grammaire pour former des **définitions** et des **théorèmes** qu'on déduit des axiomes par le raisonnement , à l'aide de règles de logique.

Bien entendu, dans une théorie, on s'exprime grâce à des énoncés rédigés correctement.
Une théorie demeure valable tant que qu'on n'a pas établi qu'une proposition était contradictoire.
Beaucoup de philosophes et de mathématiciens ont essayé de définir ou de caractériser les mathématiques :

"La Mathématique est la seule science dans laquelle on ne sait pas de quoi l'on parle, ni si ce que l'on dit est vrai"
Bertrand RUSSEL, philosophe et mathématicien anglais 1872-1970

"Les mathématiques sont des calques qui se superposent les uns derrière les autres pour engendrer la complexité du monde mais aussi pour en structurer la compréhension. Ainsi derrière ou devant la réalité concrète humaine se place les calques de l'abstraction mathématique avec ses descriptions, ses méthodes ou ses symboles plus ou moins représentatifs de ce qui se cache derrière"
André DELEDICQ - La jubilation en Mathématiques - 2002 - IREM Paris 7

"un ensemble de connaissances scientifiques étroitement liées les unes aux autres fondées sur des notions qui se trouvent dans tous les esprits, portant sur des vérités rigoureuses que la raison est capable de découvrir sans le secours de l'expérience et qui néanmoins peuvent toujours se confirmer par l'expérience dans les lites d'approximation que l'expérience comporte"
COURNOT - Hachette 1847

2 Qu'est-ce que la Logique mathématique ?

La Mathématique est un champ d'action privilégié pour acquérir la maîtrise de mécanismes mis en jeu dans toute forme de raisonnement, quelque soit l'objet et le champ de la réflexion : littéraire, scientifique, philosophique.
La Logique, quant à elle, indique quelles sont les règles que l'on doit suivre lorsque l'on veut "bien raisonner".

2.1 Un peu d'histoire :

"Créée par les Grecs, la logique a côtoyé la philosophie tout au long du Moyen-Age sans dévier de sa ligne initiale. les Modernes , en la formalisant et en l'axiomatisant, en sont venus à la lier étroitement aux mathématiques. Science du syllogisme au départ, elle est devenue théorie générale de la déduction. Sa solidité et sa puissance lui ont permis de prétendre servir de fondement aux Mathématiques. Ce cheminement va d'ARISTOTE à Alan TURING en passant par Guillaume d'OCCAM, BOOLE, FREGE et GODEL"
Jean- Pierre BELNA - Histoire de La Logique

- Des grecs (**Zénon d'Elée**, **Autolique de Pitane**, **Eudème de Rhodes**,**Xénocrate**, ...) se sont intéressés au raisonnement logique.
  Parmi eux, **Aristote** est un de ceux qui a le plus contribué à son essor en inventant en particulier les syllogismes.

ARISTOTE (384 - 322 AvJC)

Exemples de syllogismes célèbres :

```
Tout homme est mortel (prémisse majeure)
or Socrate est un homme (prémisse mineure)
donc Socrate est mortel (conclusion)

Un cheval bon marché est rare
Ce qui est rare est cher
donc un cheval bon marché est cher!
```

- Pour les penseurs du Moyen Age comme **Guillaume de Sherwood** (Introduction à la logique) ou du théologien franciscain **Guillaume d'Ockam** (Somme de Logique),...

Guillaume d'OCKAM(1290 - 1347)

la logique était conçue comme la discipline du vrai et du faux et n'était donc qu'une partie de la science langagière.Cette dernière comprenait 3 parties :

1. la grammaire qui enseigne à parler correctement
2. la rhétorique qui enseigne à parler élégamment
3. la logique qui enseigne à parler vrai

Avant d'étudier la théologie, il fallait maîtriser les sept arts libéraux divisés en deux domaines : Le *trivium* ou arts de la parole (la grammaire, la réthorique et la dialectique) et le *quadrivium* (la musique, l'arithmétique, la géométrie et l'astronomie).

- 18ème siècle : **Leibnitz** va tenter de mathématiser la logique

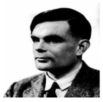
Gottfried LEIBNITZ (1646-1716)

- mais c'est surtout au 19ème siècle que la logique mathématique va prendre forme grâce aux travaux de l'anglais **Georges BOOLE**(1815-1864), inventeur de la logique informatique, **Augustus MORGAN** (1806-1871),**Dedekind** et surtout de **Fiedrich Ludwig Golt-**

tlob FREGE, (8 novembre 1848 à Wismar 26 juillet 1925 à Bad Kleinen), mathématicien et philosophe allemand, le plus grand logicien de tous les temps.

Frege est le premier à élaborer un système axiomatisé du calcul des propositions et introduit la notion de quantificateurs universel ($\forall$) et existentiel($\exists$)

- Ses travaux seront poursuivis au 20ème siècle par **Alan TURING** qui crée le premier ordinateur théorique, **Bertrand RUSSEL** et **Alfred WHITEHEAD**.



Alan TURING (1912-1954 : Angleterre , le père de l' informatique)

La logique mathématique est maintenant la théorie mathématique qui étudie le raisonnement mathématique.
Elle relève donc de ce que l'on appelle **la méta-mathématique** c'est-à-dire des mathématiques qui réfléchissent sur les mathématiques.
La logique mathématique a pour but de donner des formalismes aux mathématiciens afin qu'ils puissent :

- justifier les éléments des raisonnements qu'ils vont utiliser
- communiquer les résultats trouvés.

Ses résultats les plus impressionnants sont des résultats "négatifs" : la logique mathématique dit ce qu'il est vain de chercher et nous oriente sur ce qu'il est possible de trouver. On distingue 3 niveaux de logique :

- la logique d'ordre 0 dite logique des propositions
- la logique d'ordre 1 dite logique des prédicats
- les logiques d'ordre 2 ou plus, concues par Frege et qui étudient certains aspects du raisonnement.

3 La logique des propositions

3.1 Qu'est-ce qu'une proposition mathématique ?

Dans une théorie mathématique, on appelle proposition ou assertion tout énoncé cohérent p dont on peut dire sans ambiguité qu'il est ou bien vrai ou bien faux.
Vrai (resp Faux) s'appelle une valeur de vérité de la proposition p.
En informatique , on dit que p est un booléen qui peut prendre l'une des 2 valeurs (True pour vrai ou False pour Faux) .
Il a pour table de vérité :

p
V
F

3.1.1 Exemples

- "$3 < 2$" est une proposition fausse
- "$0 \in \mathbb{N}$" est une proposition vraie
- "$x < 4$" n'est pas une proposition car on ne peut pas dire sans ambiguïté que cet énoncé est vrai ou que cet énoncé est faux. Tout dépend de la valeur de x.

3.1.2 Exercice

1. Combien doit-on distinguer de cas lorsqu'on manipule 2 propositions p et q ?
2. Combien doit-on distinguer de cas lorsqu'on manipule 3 propositions p, q et r ?
3. Conjecturer le nombre de cas lorqu'on manipule n propositions avec $n \in \mathbb{N}^*$

1. Lorsqu'on manipule 2 propositions p et q , on doit distinguer 4 cas :

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

2. Lorsqu'on manipule 3 propositions p, q et r on doit distinguer 8 cas :

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

3. Lorsqu'on manipule n propositions $p, q, r, s, t, \cdots$, on doit distinguer 2^n cas.
Ceci se démontre aisément par récurrence.

3.2 Qu'est ce qu'un quantificateur ?

- $\forall$ s'appelle un quantificateur universel et se lit "pour tout" ou "quel que soit"
- $\exists$ s'appelle un quantificateur existentiel et se lit "il existe au moins "
- $\exists!$ s'appelle un quantificateur existentiel et se lit "il existe de façon unique"

3.3 Qu'est-ce qu'un prédicat ?

- $''x < 4''$ n'est pas une proposition car on ne peut pas dire sans ambiguïté que cet énoncé est vrai ou que cet énoncé est faux. Tout dépend de la valeur de x. Nous dirons que cet énoncé est un prédicat d'ordre 1.
- De même,$''x^2 + y^2 = 1''$ est un prédicat d'ordre 2.
- Une proposition est un prédicat d'ordre 0
- Si l'on fait précéder un prédicat de poids k par un quantificateur, on crée ainsi un prédicat d'ordre k - 1
  $''\exists x \in \mathbb{N}\ x < 4''$ qui se lit "il existe au moins un entier naturel strictement plus petit que 4 "est une proposition vraie.
  $''\forall x \in \mathbb{N}\ x < 4''$ qui se lit "tout entier naturel est strictement plus petit que 4 "est une proposition fausse.

3.3.1 Exemple : Le grand théorème de Pierre de FERMAT

Pierre de FERMAT (1601-1665 : Le prince des amateurs)

Pierre de FERMAT est un magistrat et mathématicien toulousain qui a affirmé avoir démontré que la proposition suivante suivante dite le Grand Théorème de FERMAT est fausse : $''\forall n$ entier > 2 , $\exists(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tel que $x^n + y^n = z^n$
Cette démonstration n'a jamais été retrouvée et depuis 350 ans les mathématiciens l'ont fait avancer entier par entier :

- n=3 Euler (1774) - Lagrange - Legendre-Gauss
- n=4 Fermat lui-même
- n=5 Legendre
- n=7 Lamé (1837)
- $n < 100$ sauf 39,59 et 67 Kummer (1810-1893)

Le japonais Miyaoka a cru démontrer ce théorème en 1988 mais les vérifications ont montré qu'il s'était trompé. Le britannique Andrew Miles le démontre le 23 Juin 1993 à l'aide de la

Andrew WILES (1953 -)

théorie des courbes elliptiques et remporte le prix Wolfskehl de 100 000 marks.

3.4 Les principaux connecteurs ou opérateurs logiques

Un connecteur logique permet à partir d'une ou de plusieurs propositions de construire d'autres propositions.

1. le connecteur unaire : la négation NON noté NOT ou encore $\neg$ qui obéit à la règle suivante :

p	$non(p)$
$Vrai$	$Faux$
$Faux$	$Vrai$

2. les connecteurs binaires :
   - la disjonction inclusive OU notée OR ou encore
   - la conjonction ET notée AND ou encore
   - l'implication logique $\Rightarrow$
   - l'équivalence logique $\Leftrightarrow$
   - la disjonction exclusive OU BIEN notée XOR ou $\otimes$

   qui obéissent aux règles de logique suivantes :

p	q	$p\ ou\ q$	$p\ et\ q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \otimes q$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	V	F	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F

La proposition : $p \Rightarrow q$ qui est Vraie lorsque p est Faux et q est Vrai est dûe au mathématicien allemand **Georg CANTOR** afin de prouver que l'ensemble vide $\emptyset$ est inclus dans n'importe quel ensemble E.
En effet l'implication "$\forall x,\ x \in \emptyset \Rightarrow x \in E$" est vraie puisque "$x \in \emptyset$" est F, peu importe la valeur de vérité de "$x \in E$" donc $\emptyset \subset E$

Georg CANTOR (1845 - 1918 le père de la Théorie des Ensembles)

"Nul ne doit nous exclure du Paradis que Cantor a créé "
David HILBERT

3.4.1 Exercice

Quelle implication logique peut-on créer entre les 2 propositions suivantes :

- p : "Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle"
- q :"Le quadrilatère $ABCD$ est un carré"

Réponse :
$q \Longrightarrow p$ est vraie mais $p \Longrightarrow q$ est fausse.

3.4.2 Exercice

Quelle implication logique peut-on créer entre les 2 propositions suivantes :

- p : "Il y a toujours un médecin de garde"
- q :"Il y a un même médecin toujours de garde"

Réponse :
$q \Longrightarrow p$ est vraie mais $p \Longrightarrow q$ est fausse.

3.4.3 Exercice

Soit L l'ensemble des langues vivantes étudiées dans un lycée . Soit E l'ensemble des élèves de ce lycée. L'énoncé "l'élève x étudie la langue y" se symbolise par " $x \star y$"
Traduire en francais les 6 propositions suivantes :

1. $p_1 : \forall x \in E , \forall y \in L \ x \star y$
2. $p_2 : \forall x \in E , \exists y \in L \ x \star y$
3. $p_3 : \exists x \in E , \exists y \in L \ x \star y$
4. $p_4 : \exists x \in E , \forall y \in L \ x \star y$
5. $p_5 : \exists y \in L , \forall x \in E \ x \star y$
6. $p_6 : \exists y \in L , \exists x \in E \ x \star y$

Peut-on permuter deux $\forall$, deux $\exists$? un $\forall$ et un $\exists$?

Réponse :

1. p_1 : Tous les élèves étudient toutes les langues enseignées dans ce lycée.
2. p_2 : Tout élève étudie au moins une langue enseignée dans ce lycée.
3. p_3 : Il y a au moins un élève qui étudie au moins une langue enseignée dans ce lycée.
4. p_4 : Il y a au moins un élève qui étudie toutes les langues enseignées dans ce lycée.
5. p_5 : Il y a au moins une langue étudiée par tous lés élèves de ce lycée.
6. p_6 : Il y a au moins une langue qui est étudiée par au moins un élève.

On peut permuter deux $\forall$, ainsi que deux $\exists$ mais on ne peut pas permuter un $\forall$ et un $\exists$.
Ici $p_5 \Longrightarrow p_2$ mais $p_2 \Longrightarrow p_5$ est faux.

4 Formes propositionnelles

Une forme propositionnelle est une expression formée à partir de propositions et de connecteurs.
Soient des propositions $p, q, r, \cdots$
$f_1 = p$ est une forme propositionnelle constante.
$f_2 = p \bigwedge q$ est une forme propositionnelle à 2 variables p et q.
$f_3 = p \bigwedge ((\neg q) \bigvee r)$ est une forme propositionnelle à 3 variables p, q et r.
On appelle tautologie toute proposition logique vraie quelque soient les valeurs des variables propositionnelles qui la composent.
On appelle contradiction ou antilogie toute proposition logique fausse quelque soient les valeurs des variables propositionnelles qui la composent.

4.1 Exemples de tautologies et d'antilogies

En déterminant leur table de vérité , on prouve que :

4.1.1 Exemple 1

$p\ ou\ (non(p))$ est une tautologie

p	$non(p)$	$p\ ou\ non(p)$
V	F	V
F	V	V

4.1.2 Exemple 2

$p\ et\ (non(p))$ est une antilogie ou une contradiction

p	$non(p)$	$p\ et\ non(p)$
V	F	F
F	V	F

4.1.3 Exemple 3

le modus ponens $((p\ et\ (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q)$ est une tautologie

p	q	$p \Rightarrow q$	$p\ et\ (p \Rightarrow q)$	$((p\ et\ (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

4.1.4 Exemple 4

> le modus tollens $(non(q)\ et\ (p \Rightarrow q)) \Rightarrow non(p)$ est une tautologie

p	q	$non(p)$	$non(q)$	$p \Rightarrow q$	$non(q)\ et\ (p \Rightarrow q)$	$(non(q)\ et\ (p \Rightarrow q)) \Rightarrow non(p)$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

5 Les 23 lois logiques les plus importantes.

Si p, q et r sont des propositions alors :

1. $p\ et\ non(p)$ est FAUSSE : C'est le principe dit du "tiers exclu"
2. $p\ ou\ non(p)$ est VRAIE
3. $p \Leftrightarrow non(non(p))$ est VRAIE
4. $(p\ et\ q) \Leftrightarrow (q\ et\ p)$ est VRAIE : commutativité de la conjonction
5. $(p\ ou\ q) \Leftrightarrow (q\ ou\ p)$ est VRAIE : commutativité de la disjonction
6. $(p\ et\ q)\ et\ r \Leftrightarrow p\ et\ (q\ et\ r)$ est VRAIE : associativité de la conjonction
7. $(p\ ou\ q)\ ou\ r \Leftrightarrow p\ ou\ (q\ ou\ r)$ est VRAIE : associativité de la disjonction
8. $p\ et\ (q\ ou\ r) \Leftrightarrow (p\ et\ q)\ ou\ (p\ et\ r)$ est VRAIE : distributivité de la conjonction par rapport à la disjonction
9. $p\ ou\ (q\ et\ r) \Leftrightarrow (p\ ou\ q)\ et\ (p\ ou\ r)$ est VRAIE : distributivité de la disjonction par rapport à la conjonction
10. $((p \Rightarrow q)\ et\ (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ est VRAIE : transitivité de l'implication
11. $((p \Rightarrow q)\ et\ (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$ est VRAIE : Autre écriture de l'équivalence
12. $non(p\ et\ q) \Leftrightarrow non(p)\ ou\ non(q)$ est VRAIE : 1ère loi logique de MORGAN
13. $non(p\ ou\ q) \Leftrightarrow non(p)\ et\ non(q)$ est VRAIE : 2ème loi logique de MORGAN
14. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (non(q) \Rightarrow non(p))$ est VRAIE : La contraposition
15. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (non(p)\ ou\ q)$ est VRAIE
16. $non(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p\ et\ non(q))$ est VRAIE : Négation d'une implication. Cette loi logique est très utile
17. $(p\ et\ VRAI) \Leftrightarrow p$
18. $(p\ ou\ VRAI) \Leftrightarrow VRAI$
19. $(p\ et\ FAUX) \Leftrightarrow FAUX$

20. $(p \;\; ou \; FAUX) \Leftrightarrow p$
21. $(p \; xor \; q) \Leftrightarrow ((p \; et \; non(q)) \; ou \; (non(p) \; et \; q))$
22. $(p \; xor \; q) \Leftrightarrow (non(p) \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (non(p \Leftrightarrow q))$
23. $non(p \; xor \; q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q))$. La négation du xor est l'équivalence logique

6 Raisonnement

6.1 Propriété, hypothése, conclusion

La plupart des théorèmes d'un cours de Mathématiques sont écrits sous la forme $p \Rightarrow q$.
Si $p \Rightarrow q$ on dit qu'il suffit que p soit vraie pour que q soit vraie.
La vérité de p est une condition suffisante à la vérité de q. Cela ne veut pas dire que c'est une nécessité. Ce n'est pas parce que l'implication $p \Rightarrow q$ est vraie que l'implication réciproque $q \Rightarrow p$ est vraie.

6.1.1 Remarque

Attention, il y a des implications logiques qui ont des réciproques fausses ! ! !

- n et p sont des entiers pairs $\Rightarrow$ l'entier $n + p$ est pair.
  La réciproque est fausse car la somme de deux entiers impairs est paire.
- M est le milieu de $[AB] \Rightarrow MA = MB$
  La réciproque est fausse car si $MA = MB$ alors M appartient à la médiatrice de $[AB]$
- Voici un théorème de météorologie : " S'il pleut alors il y a des nuages". il suffit qu'il pleuve pour qu'il y ait des nuages mais cela n'est pas nécessaire à l'existence de nuages. Ici $p \Rightarrow q$ est vraie mais $q \Rightarrow p$ est fausse. Les propositions p et q ne sont donc pas équivalentes.

6.1.2 Autres formulations de l'implication

Dans la propriété $p \Rightarrow q$, p s'appelle l'hypothèse et q s'appelle la conclusion.
On sait aussi que $p \Rightarrow q$, est équivalent à sa contraposée $non(q) \Rightarrow non(p)$, Les formulations suivantes sont équivalentes :

- si p vraie alors q est vraie.
- p vraie donc q est vraie.
- q est vraie car p est vraie.
- Pour que p soit vraie il faut que q soit vraie.
- Pour que q soit vraie il suffit que p soit vraie.
- Si $non(q)$ est vraie alors $non(p)$ est vraie.
- Si $non(q)$ est vraie donc $non(p)$ est vraie.
- $non(p)$ est vraie car $non(q)$ est vraie.
- Pour que $non(q)$ soit vraie il faut que $non(p)$ soit vraie.
- Pour que $non(p)$ soit vraie il suffit que $non(q)$ soit vraie.

6.2 Equivalence logique

Lorsque l'implication $p \Rightarrow q$ et son implication réciproque $q \Rightarrow p$ sont vraies on dira que les propositions p et q sont équivalentes ou encore que p est une CNS(Condition nécessaire et suffisante) de q ce qui s'écrit $p \Leftrightarrow q$.

Il y a des équivalences logiques célèbres :

- Le triangle ABC est rectangle en $A \Leftrightarrow \quad BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Egalité de Pythagore)
- I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
- Un produit de réels est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul
  $ab = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$
- Deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ sont égaux pour tout réel x si et seulement si les coefficients des monômes respectifs sont égaux.

Attention aussi dans les résolutions de systèmes par addition :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=6 \\ x-y=2 \end{array}\right. \Rightarrow 2x = 8$$

On perd ici l'équivalence logique. Donc on aura au bout de ce raisonnement $\mathcal{S} \subset \{(4,2)\}$. Il faudra absolument écrire la vérification : le couple $(4,2)$ est solution du système car $x + y = 4 + 2 = 6$ et $x - y = 4 - 2 = 2$.
On aura alors $\{(4,2)\} \subset \mathcal{S}$.
On pourra alors conclure : Comme $\mathcal{S} \subset \{(4,2)\}$ et $\{(4,2)\} \subset \mathcal{S}$ alors $\mathcal{S} = \{(4,2)\}$.
Pour garder l'équivalence logique tout au long du raisonnement et avoir directement
$\mathcal{S} = \{(4,2)\}$, il faut utiliser une méthode hybride en conservant une des deux équations initiales

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=6 \\ x-y=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=6 \\ 2x=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=6 \\ x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2 \\ x=4 \end{array}\right.$$

On en déduit que $\mathcal{S} = \{(4,2)\}$

7 Exercices

7.1 Négations de propositions

Pour chacune des propositions suivantes , déterminer leur valeur de vérité ainsi que leur négation :

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{N} \quad x \neq 0$
3. $\forall x \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{1}{x} \in \mathbb{N}$
4. $\forall x \in \mathbb{Z}^* \quad x^2 > 0$
5. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \dfrac{3x-1}{x+1} \in \mathbb{R}$
6. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \dfrac{3x-1}{x^2+1} \in \mathbb{R}$
7. $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 > 0$
8. $\exists x \in \mathbb{N} \quad x \neq 0$
9. $\exists x \in \mathbb{N}^* \quad x > 2515$
10. $\exists x \in \mathbb{Z}^* \quad x^2 < 0$
11. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \dfrac{3x-1}{x+1} \in \mathbb{R}$
12. $\exists x \in \mathbb{R} \quad -x^2 - 7 \geq 0$
13. $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad x < y$
14. $\exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad x < y$
15. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x^2 - y^2 > 0$
16. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x^2 - y^2 < 0$
17. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad xy = y$
18. $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad xy = y$
19. $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad xy = 2$

7.1.1 Corrigé

Pour chacune des propositions suivantes , déterminer leur valeur de vérité ainsi que leur négation :

1. $p : \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 > 0$ est fausse car
   $non(p) : \exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 \leq 0$ est vraie. Exemple : $x = 0$.

2. $p : \forall x \in \mathbb{N} \quad x \neq 0$ est fausse car
   $non(p) : \exists x \in \mathbb{N} \quad x = 0$ est vraie. Exemple : $x = 0$.
3. $p : \forall x \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{1}{x} \in \mathbb{N}$ est fausse car
   $non(p) : \exists x \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{1}{x} \notin \mathbb{N}$ est vraie. Exemple $x = 2$

4. $p : \forall x \in \mathbb{Z}^* \quad x^2 > 0$ est vraie car un carré est positif ou nul et le seul cas où le carré d'un nombre est nul c'est lorsque ce nombre est nul.
$non(p) : \exists x \in \mathbb{Z}^* \quad x^2 \leq 0$ est donc Faux
5. $p : \forall x \in \mathbb{R} \quad \dfrac{3x-1}{x+1} \in \mathbb{R}$ est faux car
$non(p) : \exists x \in \mathbb{R} \quad \dfrac{3x-1}{x+1} \notin \mathbb{R}$ est vrai. Exemple : $x = -1$.
6. $p : \forall x \in \mathbb{R} \quad \dfrac{3x-1}{x^2+1} \in \mathbb{R}$ est vrai car pour tout réel x on a $3x-1$ qui existe ainsi que x^2+1 avec en plus le dénominateur x^2+1 qui ne s'annule jamais car sa plus petite valeur est 1 vu que la plus petite valeur de x^2 est 0 donc
$non(p) : \exists x \in \mathbb{R} \quad \dfrac{3x-1}{x^2+1} \notin \mathbb{R}$ est faux
7. $p : \exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 > 0$ est vrai. Exemple : $x = 1$ donc
$non(p) : \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \leq 0$ est faux
8. $p : \exists x \in \mathbb{N} \quad x \neq 0$ est vrai. Exemple : $x = 1$ donc
$non(p) : \forall x \in \mathbb{N} \quad x = 0$ est faux.
9. $p : \exists x \in \mathbb{N}^* \quad x > 2515$ est vrai. exemple : $x = 2516$ donc
$non(p) : \forall x \in \mathbb{N}^* \quad x \leq 2515$
10. $p : \exists x \in \mathbb{Z}^* \quad x^2 < 0$ est faux car
$non(p) : \forall x \in \mathbb{Z}^* \quad x^2 \geq 0$ est vrai puisque un carré est positif ou nul .
11. $p : \exists x \in \mathbb{R} \quad \dfrac{3x-1}{x+1} \in \mathbb{R}$ est vrai. Exemple : $x = 0$ donc
$non(p) : \forall x \in \mathbb{R} \quad \dfrac{3x-1}{x+1} \notin \mathbb{R}$ est faux.
12. $p : \exists x \in \mathbb{R} \quad -x^2 - 7 \geq 0$ est faux car
$non(p) : \forall x \in \mathbb{R} \quad -x^2 - 7 < 0$ est vrai puisque $-x^2 \leq 0$ donc $-x^2 - 7 \leq -7$ donc $-x^2 - 7 < 0$
13. $p : \forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad x < y$ est vrai exemple : $y = x + 1$ donc
$non(p) : \exists x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad x \geq y$ est faux
14. $p : \exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad x < y$ est faux
$non(p) : \forall y \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{N} \quad x \geq y$ est vrai. Exemple : $x = y + 1$
15. $p : \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x^2 - y^2 > 0$ est faux car
$non(p) : \exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x^2 - y^2 \leq 0$ est vrai. Exemple $x = 0$ et $y = 0$.
16. $p : \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x^2 - y^2 < 0$ est faux car
$non(p) : \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x^2 - y^2 \geq 0$ est vrai. Exemple : $y = 0$.
17. $p : \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad xy = y$ est vrai. exemple : $x = 1$ donc
$non(p) : \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad xy \neq y$ est faux.
18. $p : \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad xy = y$ est vrai. Exemple : $x = 1$ donc
$non(p) : \exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad xy \neq y$ est faux
19. $p : \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad xy = 2$ est faux car
$non(p) : \exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad xy \neq 2$ est vrai. Exemple : $y = 0$.

7.2 Exercice

Une sorite est une énigme basée sur un raisonnement à la manière du logicien anglais le révérend père Charles Dogson alias Lewis Caroll (1832-1898) connu pour ses ouvrages : Alice au pays des merveilles, La Chasse au snark,...
Soient les 3 phrases suivantes prononcées par Alice :

- Les personnes qui aiment les carottes sont aimables.
- Tout logicien aime les écrits de Lewis Caroll.
- Les personnes qui aiment les écrits de Lewis Caroll aiment les carottes.

Quelle est la conclusion de ce raisonnement ?

7.2.1 Corrigé

Tout logicien aime les écrits de Lewis Caroll. Or Les personnes qui aiment les écrits de Lewis Caroll aiment les carottes.
et comme les personnes qui aiment les carottes sont aimables.
Par conséquent, La conclusion de ce raisonnement est que tout logicien est aimable

7.3 Exercice

Un ensemble E est constitué de 3 éléments de formes différentes : un triangle, un carré et un disque.
Les couleurs de ces 3 éléments sont différentes : l'un d'entre eux est rouge, l'autre est vert et le troisième est bleu.
Vous savez que les 3 propositions suivantes sont vraies :

- p : "si le triangle est rouge alors le carré est bleu"
- q : " si le triangle est bleu alors le carré est vert."
- r : " si le carré n'est pas rouge alors le disque est bleu"

1. Montrer que si l'on suppose que le triangle est rouge alors l'on aboutit à une contradiction.
2. Montrer que si l'on suppose que le triangle est bleu alors l'on aboutit à une contradiction.
3. Déterminer alors la couleur de chaque élément. Justifier.

7.3.1 Corrigé

Un ensemble E est constitué de 3 éléments de formes différentes : un triangle, un carré et un disque.
Les couleurs de ces 3 éléments sont différentes : l'un d'entre eux est rouge, l'autre est vert et le troisième est bleu.
Vous savez que les 3 propositions suivantes sont vraies :

- p : "si le triangle est rouge alors le carré est bleu"
- q : " si le triangle est bleu alors le carré est vert."
- r : " si le carré n'est pas rouge alors le disque est bleu"

1. Si l'on suppose que le triangle est rouge alors le carré sera bleu d'après p. Mais alors le carré est non rouge donc le disque est bleu d'après r. On aboutit à une contradiction car on a alors deux objets bleus.

2. Si l'on suppose que le triangle est bleu alors le carré sera vert d'après q. Mais alors le carré est non rouge donc le disque est bleu d'après r. On aboutit à une contradiction car on a alors deux objets bleus.
3. Le triangle ne pouvant être ni rouge, ni bleu alors il est forcément vert. Par conséquent, de deux choses l'une :
   - ou bien le carré est rouge et le disque est bleu.
   - ou bien le carré est bleu et le disque est rouge. Ce deuxième cas n'est pas possible car le carré étant non rouge, le disque sera bleu. Contradiction

   En conclusion : le triangle est vert, le carré est rouge et le disque est bleu.

7.4 Enigme : Vol dans une banque

> 1. Un vol a été commis dans une banque. Trois suspects ont été arrêtés : André, Bernard et Claude. Nous savons à leur sujet que :
>   (a) Si André est innocent alors Claude est coupable.
>   (b) Si Bernard est innocent alors André est coupable
>   (c) Si André est coupable alors Bernard l'est aussi
>   (d) Si Bernard est coupable alors Claude est innocent
> 2. Ecrire la contraposée de chacune des ces 4 propositions.
> 3. Répondre alors aux questions suivantes : Qui est innocent ? Qui est coupable ? Justifier.

7.4.1 Corrigé

1. Un vol a été commis dans une banque. Trois suspects ont été arrêtés : André, Bernard et Claude. Nous savons à leur sujet que :
   (a) $p_1 : Ai \Longrightarrow Cc$
   (b) $p_2 : Bi \Longrightarrow Ac$
   (c) $p_3 : Ac \Longrightarrow Bc$
   (d) $p_4 : Bc \Longrightarrow Ci$
2. (a) $cp_1 : Ci \Longrightarrow Ac$
   (b) $cp_2 : Ai \Longrightarrow Bc$
   (c) $cp_3 : Bi \Longrightarrow Ai$
   (d) $cp_4 : Cc \Longrightarrow Bi$
3. - Si l'on suppose que Bernard est innocent alors d'après cp_3 on a André innocent. Mais alors d'après cp_2 on a Bernard coupable. On aboutit donc à une contradiction.
   - Forcément Bernard est coupable mais alors Claude est innocent d'après p_4.
   - Comme Claude est innocent alors André est coupable d'après cp_1.

En conclusion, Claude est innocent et Bernard et André sont coupables.

7.5 L'oasis, le désert et les deux sphinx

Vous êtes perdu dans le désert. Vous arrivez à une bifurcation. Chacune des 2 pistes est gardée par un sphinx que vous pouvez interroger. Les pistes peuvent soit conduire à une oasis, soit se perdre dans un désert profond.(au mieux elles conduisent toutes à un oasis, au pire elles se perdent toutes les deux).
A : le sphinx de droite vous répond : "une au moins des 2 pistes conduit à une oasis "
B : le sphinx de gauche vous répond : " La piste de droite se perd dans le désert"
C : vous savez que les 2 sphinx disent tous les deux la vérité ou bien mentent tous les deux"
On note OD la proposition :"Il y a une oasis au bout de la route de droite " et OG la proposition : "il y a une oasis au bout de la route de gauche"

1. Exprimer par une formule logique chacune des affirmations A et B
2. Exprimer alors la connaissance C
3. Résoudre alors cette énigme soit en utilisant les tables de vérité, soit en utilisant des lois logiques

7.5.1 Corrigé

On note OD la proposition :"Il y a une oasis au bout de la route de droite " et OG la proposition : "il y a une oasis au bout de la route de gauche"

1. On peut exprimer par une formule logique chacune des affirmations A et B :
   $A = OD$ ou OG
   $B = non(OD)$
2. On peut alors exprimer la connaissance C :
   $C = (A$ et $B)$ ou bien $(non(A)$ et $non(B))$
3. Résoudre alors cette énigme
   - soit en utilisant des lois logiques :
     $C = (A$ et $B)$ ou bien $(non(A)$ et $non(B))$
     $C = ((OD$ ou $OG)$ et $non(OD))$ ou bien $(non(OD$ ou $OG)$ et $non(non(OD)))$
     $C = ((OD$ et $non(OD))$ ou $(OG$ et $non(OD))$ ou bien $(non(OD$ ou $OG)$ et $OD)$
     $C = ((FAUX)$ ou $(OG$ et $non(OD))$ ou bien $((non(OD)$ et $OG)$ et $OD)$
     $C = (OG$ et $non(OD))$ ou bien $((non(OD)$ et $OD)$ et $OG)$
     $C = (OG$ et $non(OD))$ ou bien $(FAUX$ et $OG)$
     $C = (OG$ et $non(OD))$ ou bien $FAUX$
     $C = OG$ et $non(OD)$
     Donc l'oasis est derrière la piste de gauche et le désert est derrière la piste de droite.
   - soit en utilisant les tables de vérité : C = (A et B) ou bien (non(A) et non(B))

OD	OG	$A = ODouOG$	$B = non(OD)$	$AetB$	$non(A)$	$non(B)$	$non(A)etnon(B)$	C
V	V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V	F	F	F

   - soit verbalement :
     de deux choses l'une : ou bien SG et SD mentent ou bien SG et SD disent vrai.
     Supposons qu'ils mentent donc SG ment il y aurait alors une oasis au bout de la piste de droite.

Mais SD ment aussi donc aucune des deux pistes ne conduit à une oasis. Il ya donc une contradiction.
Par conséquent, les deux sphinx SG et SD disent vrai donc l'oasis est derrière la piste de gauche et le désert est derrière la piste de droite.

7.6 Conjectures forte et faible de Christian GOLDBACH - Allemagne - 1742

Soit la proposition p : "tout entier pair strictement supérieur à 4 est la somme de 2 entiers premiers". C'est ce que l'on appelle la conjecture forte de GOLDBACH.
Par exemple $8 = 5 + 3$; $12 = 5 + 7$.
Soit la proposition q : "tout entier impair strictement supérieur à 7 est la somme de 3 entiers premiers". C'est ce que l'on appelle la conjecture faible de GOLDBACH. Par exemple $15 = 7 + 5 + 3$
On ne sait pas pour l'instant si la proposition p (appelée conjecture forte de GOLDBACH) est vraie.
En 2013, Harald HELFGOTT (mathématicien péruvien né en 1977) a réussi à démontrer une version « faible » de la conjecture de Goldbach.
Par contre, on sait démontrer facilement que la conjecture forte implique la conjecture faible : l'implication ($p \Longrightarrow q$) est vraie en supposant que p est vraie.

7.6.1 Corrigé

Supposons que la proposition p : "tout entier pair strictement supérieur à 4 est la somme de 2 entiers premiers" est vraie.
Soit un entier n impair tel que $n \geq 7$. Donc $n = 2k + 3$ et $n \geq 7$ donc $2k + 3 \geq 7$ donc $2k \geq 4$.
Or d'après p : tout entier pair strictement supérieur à 4 est la somme de 2 entiers premiers donc $2k = p_1 + p_2$ où p_1 et p_2 sont premiers.
On a donc $n = 2k + 3 = p_1 + p_2 + 3$. CQFD. Donc q est vraie.
Par conséquent, l'implication ($p \Longrightarrow q$) est vraie.

7.7 Exercice

Soient p et q des propositions.

1. Quelle est la réciproque de $p \Rightarrow q$?
2. Quelle est la contraposée de $p \Rightarrow q$? Que pouvez-vous dire de la proposition $p \Rightarrow q$ et de sa contraposée ?
3. Donner une autre proposition équivalente à $p \Rightarrow q$. Prouvez le à l'aide d'une table de vérité.
4. En déduire la négation de l'implication : $p \Rightarrow q$. Justifier.
5. On dit qu'une application f d'un ensemble E vers un ensemble F est injective lorsque :
   $\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
   Ecrire alors la définition d'une application f de E dans F qui n'est pas injective.
6. L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est elle injective ? Justifier.

7.7.1 Corrigé

Soient p et q des propositions.

1. La réciproque de $p \Rightarrow q$ est $q \Longrightarrow p$.
2. La contraposée de $p \Rightarrow q$ est $non(q) \Longrightarrow non(p)$. La proposition $p \Rightarrow q$ et sa contraposée sont équivalentes.
3. Une autre proposition équivalente à $p \Rightarrow q$ est $non(p)$ ou q. On peut le prouver le à l'aide d'une table de vérité :

p	q	$non(p)$	$non(p)$ ou q	$p \Rightarrow q$	$(non(p)\ ou\ q) \iff (p \Longrightarrow q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

4. $non(p \Longrightarrow q \iff non(non(p)$ ou $q) \iff non(non(p))$ et $non(q) \iff p$ et $non(q)$ donc la négation de l'implication : $p \Rightarrow q$ est p et $non(q)$.
5. On dit qu'une application f d'un ensemble E vers un ensemble F est injective lorsque :
   $\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
   La définition d'une application f de E dans F qui n'est pas injective est donc :
   $\exists x \in E \quad \exists x' \in E \qquad x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$
6. L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas injective car $2 \neq -2$ et $f(2) = f(-2) = 4$.

7.8 La logique normande

Les Normands utilisent un système logique qui comporte 3 valeurs de vérité : vrai, faux et peut-être et les connecteurs logiques non, et , ou , ou bien vérifiant les règles suivantes :

- non(vrai) = faux ; non(faux) = vrai ; non(peut-être) = peut-être.
- (p et q) est vrai quand p et q sont vrais , (p et q) est faux quand p est faux ou q est faux, (p et q) vaut peut-être dans les autres cas.
- (p ou q) est non(non(p) et non(q))
- (p ou bien q) est (p ou q) et non (p et q)

Simplifier alors le plus que possible l'expression suivante : vrai et (faux ou bien peut-être).
Attention ! Dans cet exercice, vous ne devez utiliser que les règles de logique normande définies ci-dessus.

7.8.1 Corrigé

V et [F ou bien P].
V et [(F ou P) et non(F et P)]
V et [non(non(F) et non(P)) et non(F)]
V et [non(V et P) et V]
V et [non(P) et V]
V et [P et V]
V et [P]
P Donc l'expression suivante : vrai et (faux ou bien peut-être) se simplifie en peut-être.

7.9 Complémentaire d'un sous-ensemble

Soit un ensemble E. Soient A et B des sous ensembles (ou des parties) de E. On appelle complémentaire de A dans E qu'on note $\overline{A}$ le sous ensemble formé des éléments de E qui ne sont pas dans A. Donc $\overline{A} = \{x \in E/x \notin A\}$
Idem pour $\overline{B}$.

1. Démontrer que $\overline{\overline{A}} = A$
2. Démontrer que $\overline{A} \cap$ A = $\emptyset$
3. Démontrer que $\overline{A} \cup$ A = E
4. Démontrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
5. Démontrer que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

7.9.1 Corrigé

Soit un ensemble E. Soient A et B des sous ensembles (ou des parties) de E. On appelle complémentaire de A dans E qu'on note $\overline{A}$ le sous ensemble formé des éléments de E qui ne sont pas dans A. Donc $\overline{A} = \{x \in E/x \notin A\}$
Idem pour $\overline{B}$.

1. Démontrons que $A = \overline{\overline{A}}$.
   $x \in \overline{\overline{A}} \iff non(x \in \overline{A}) \iff non(non(x \in A)) \iff x \in A$
   Conclusion : $A = \overline{\overline{A}}$
2. Démontrons que $\overline{A} \cap$ A = $\emptyset$ $x \in \overline{A} \cap A \iff x \in \overline{A}$ et $x \in A \iff non(x \in A)$ et $x \in A \iff x \in \emptyset$

Les deux dernières propositions sont équivalentes car ces deux dernières propositions sont toutes les deux fausses.
Conclusion : $x \in \overline{A} \cap A \iff x \in \emptyset$ alors $\overline{A} \cap A = \emptyset$

3. Démontrons que $\overline{A} \cup$ A = E.
$x \in \overline{A} \cup A \iff x \in \overline{A}$ ou $x \in A \iff non(x \in A)$ ou $x \in A \iff x \in E$
Les deux dernières propositions sont équivalentes car ces deux dernières propositions sont toutes les deux vraies.

4. Démontrons que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
$x \in \overline{A \cup B} \iff non(x \in A \cup B) \iff non((x \in A)$ ou $(x \in B))$
$\iff non(x \in A)$ et $non(x \in B) \iff x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.
Conclusion : $x \in \overline{A \cup B} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ alors $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
5. Démontrons que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
$x \in \overline{A \cap B} \iff non(x \in A \cap B) \iff non((x \in A)$ et $(x \in B))$
$\iff non(x \in A)$ ou $non(x \in B) \iff x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B} \iff x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
Conclusion : $x \in \overline{A \cap B} \iff x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ alors $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

7.10 Exercice

Le petit ABABA joue avec les lettres de son alphabet. Il s'est inventé les règles suivantes :

- R1 : Si dans un mot il trouve un A suivi d'un B il **peut** les remplacer par la séquence BAA
- R2 : Si dans un mot il trouve deux B qui se suivent il **peut** les retirer du mot.
- R3 : Si dans un mot il trouve trois A qui se suivent il **peut** les retirer du mot.

En partant du mot ABABABAABAAB quel est **le mot le plus court** qu'il peut obtenir ?

7.10.1 Corrigé

Voici un exemple de transformations successives :

- Le mot ABABABAABAAB est (AB)(AB)(AB)A(AB)A(AB)
- qui peut devenir (BAA)(BAA)(BAA)A(BAA)A(BAA) d'après R_1
  c'est-à-dire (BA)(AB)(AAB)(AAA)B(AAA)(BAA)
- D'après R_3 le mot se simplifie en (BA)(AB)(AAB)B(BAA)
  c'est-à-dire (BA)(AB)(AA)(BB)(BAA)
- D'après R_2 le mot se simplifie à nouveau en(BA)(AB)(AA)(BAA)
  c'est-à-dire (BA)(AB)A(AB)AA
- Il devient (BA)(BAA)A(BAA)AA d'après la règle R_1 c'est-à-dire BAB(AAA)B(AAA) A.
- En utilisant à nouveau la règle R_3 on obtient BABBA
- qui se transforme en BAA en utilisant la règle R_2

BAA est donc le mot le plus court que l'on puisse obtenir.

7.11 Les Dieux de La Vérité, du Mensonge et de la Diplomatie

Un voyageur parvient à un sanctuaire. Là vivent trois dieux qui, d'après son Guide du Routard, sont respectivement :

- le dieu de la Vérité, qui dit toujours vrai ;
- le dieu du Mensonge, qui ment toujours ;
- le dieu de la Diplomatie, qui ment ou non, - selon les circonstances.

Il rencontre successivement les trois dieux.

- Le premier lui déclare :" Le deuxième dieu est le dieu de la Vérité."
- Le deuxième dieu affirme :"Je suis le dieu de la Diplomatie"
- Quant au troisième, il prétend que "le deuxième dieu est le dieu du Mensonge"

Qui est qui ? Justifier.

7.11.1 Corrigé

Le premier ne peut être le dieu de la Vérité car s'il l'était il dirait toujours vrai et il dirait : "Je suis le dieu de la Vérité". Or ce n'est pas ce qu'il déclare.
Est-ce que le deuxième est le dieu de la Vérité, non car car s'il l'était il dirait toujours vrai et il dirait : "Je suis le dieu de la Vérité". Or ce n'est pas ce qu'il déclare.
Donc le troisième est le dieu de La Vérité.
Par conséquent ce qu'il dit est vrai. Donc, d'après sa déclaration, le deuxième dieu est le dieu du Mensonge. Et forcément le premier est le dieu de la Diplomatie.