Types de raisonnement

Christian Cyrille

26 octobre 2020

"On résoud les problèmes qu'on se pose et non les problèmes qui se posent"
Henri Poincaré

En sciences, deux façons de raisonner : - l'induction - la déduction

1 Le raisonnement par déduction

La déduction serait le procédé de l'esprit qui va du général au particulier.
Le raisonnement déductif consiste à prouver une implication du type $H \Rightarrow C$
H désigne les hypothèses et C la ou les conclusion(s).
Comment faire ? on procède par un chaînage de déductions logiques :
$H \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow C_3 \cdots \Rightarrow C_n \Rightarrow C$
Comment fait-on pour trouver ce chaînage : **de 2 façons :**

1. soit **par analyse-synthèse** : on cherche à satisfaire le but C pour cela on cherche C_n qui permet de satisfaire C puis on cherche C_{n-1} qui permet de satisfaire C_n . On remonte ainsi jusqu'à H. Cette étape s'appelle **l'analyse.** Puis on redescend : $H \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \cdots \Rightarrow C_4 \Rightarrow C_n \Rightarrow C$
   Cette deuxième étape obligatoire s'appelle **la synthèse**.
2. soit par **synthèse directement** :
   $H \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow C_3 \cdots \Rightarrow C_n \Rightarrow C$

1.1 Remarque

On peut au lieu de démontrer que $p \Longrightarrow q$ démontrer tout simplement sa contraposée :
$non(q) \Longrightarrow non(p)$

1.2 Exercice

Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall y \in \mathbb{R}^+ \quad \frac{x}{1+y} = \frac{y}{x+y} \Longrightarrow x = y$$

1.2.1 Corrigé : Méthode 1

$\dfrac{x}{1+y} = \dfrac{y}{x+y} \Longrightarrow \dfrac{x}{1+y} - \dfrac{y}{x+y} = 0$
$\Longrightarrow \dfrac{x(1+x)-y(1+y)}{(1+y)(1+x)} = 0.$
$\Longrightarrow x(1+x)-y(1+y) = 0 \Longrightarrow x + x^2 - y - y^2 = 0$
$\Longrightarrow x^2 - y^2 + x - y = 0 \Longrightarrow (x-y)(x+y) + (x-y) = 0$
$\Longrightarrow (x-y)[x+y+1] = 0 \Longrightarrow x - y = 0$ ou $x + y + 1 + 0$
$\Longrightarrow x - y = 0$ car $x + y + 1 \neq 0$ puisque $x + y + 1 \geq 1$ car $x \geq 0$ et $y \geq 0$

1.2.2 Corrigé : Méthode 2 incomplète

Supposons que $\dfrac{x}{1+y} = \dfrac{y}{x+y}$ alors en utilisant l'égalité des termes moyen et des termes extrêmes, on obtient :
$x(x+y) = y(1+y)$ donc $x^2 + xy = y + y^2$.
On peut en déduire que $x^2 - y^2 + xy - y = 0$ d'où $(x+y)(x-y) + y(x-1) = 0$

1.3 Exercice

Soit f est une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I centré en 0.

1. Démontrer que si f est paire alors sa fonction dérivée f' est impaire.
2. Démontrer que si f est impaire alors sa fonction dérivée f' est paire.

Indication :

— Si u est dérivable sur un intervalle I
— Si $u < I > \subset J$
— Si v est dérivable sur l'intervalle J

alors $v \circ u$ est dérivable sur I et $\forall x \in I \quad (v \circ u)'(x) = u'(x)\ v'(u(x))$

1.3.1 Corrigé

1. Supposons que f est paire.
   (a) Soit la fonction $x \mapsto g(x) = f(-x)$ alors g est la composée de $x \mapsto -x$ et de f.
   — $x \mapsto -x$ est dérivable sur I
   — Lorsque $x \in I$ alors $-x \in I$
   — f est dérivable sur I
   Alors g est dérivable sur I et $g'(x) = -1(f'(-x))$
   (b) Mais comme $g(x) = f(x)$ puisque $f(-x) = f(x)$ car f est paire alors $g'(x) = f'(x)$
   (c) Par conséquent, $\forall x \in -x \in I$ et $f'(-x) = -f'(x)$
   donc f' est impaire.
2. Supposons que f est impaire.
   (a) Soit la fonction $x \mapsto g(x) = f(-x)$ alors g est la composée de $x \mapsto -x$ et de f.
   — $x \mapsto -x$ est dérivable sur I
   — Lorsque $x \in I$ alors $-x \in I$
   — f est dérivable sur I
   Alors g est dérivable sur I et $g'(x) = -1(f'(-x))$
   (b) Mais comme $g(x) = -f(x)$ puisque $f(-x) = -f(x)$ car f impaire alors $g'(x) = -f'(x)$
   (c) Par conséquent, $\forall x \in -x \in I$ et $f'(-x) = -f'(x)$
   donc f' est paire.

1.4 Conjectures forte et faible de Christian GOLDBACH - Allemagne - 1742

Soit la proposition p : "tout entier pair strictement supérieur à 4 est la somme de 2 entiers premiers”. C’est ce que l’on appelle la conjecture forte de GOLDBACH.
Par exemple : $8 = 5 + 3$; $12 = 5 + 7$.
Soit la proposition q : "tout entier impair strictement supérieur à 7 est la somme de 3 entiers premiers”. C’est ce que l’on appelle la conjecture faible de GOLDBACH.
Par exemple : $15 = 7 + 5 + 3$
On ne sait pas pour l’instant si la proposition p (appelée conjecture forte de GOLDBACH) est vraie.
En 2013, Harald HELFGOTT (mathématicien péruvien né en 1977) a réussi à démontrer une version « faible » de la conjecture de Goldbach.
Par contre, on sait démontrer facilement que la conjecture forte implique la conjecture faible : l’implication ($p \Longrightarrow q$) est vraie en supposant que p est vraie.

1. Démontrer que $(p \Rightarrow q)$ est vraie c’est-à-dire que si tout entier pair supérieur à 4 est somme de 2 entiers premiers alors tout entier impair supérieur à 7 est somme de 3 entiers premiers.
2. On ne sait pas si p appelée la conjecture de Goldbach est vraie. Que peut-on alors dire de q ?

1.4.1 Corrigé

Supposons que la proposition p : "tout entier pair strictement supérieur à 4 est la somme de 2 entiers premiers” est vraie.
Soit un entier n impair tel que $n \geq 7$. Donc $n = 2k + 3$ et $n \geq 7$ donc $2k + 3 \geq 7$ donc $2k \geq 4$.
Or d’après p : tout entier pair strictement supérieur à 4 est la somme de 2 entiers premiers donc $2k = p_1 + p_2$ où p_1 et p_2 sont premiers.
On a donc $n = 2k + 3 = p_1 + p_2 + 3$. CQFD. Donc q est vraie.
Par conséquent, l’implication ($p \Longrightarrow q$) est vraie. Mais l’on ne sait pas pour l’instant si q est vraie.

2 Le raisonnement par disjonction de cas

2.1 Exercice

> Soient a et b des réels. Démontrer que si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$

2.1.1 Corrigé

Supposons $ab = 0$.

1. ou $a = 0$ CQFD.
2. ou $a \neq 0$

   On peut alors diviser les deux membres de $ab = 0$ par $\dfrac{1}{a}$.

   Donc $\dfrac{ab}{a} = \dfrac{0}{a}$ d'où $b = 0$. CQFD

2.2 Exercice

> Démontrer que pour tout entier naturel n on a $n^2 + 3n$ est un entier pair.

2.2.1 Corrigé

— ou bien n est pair donc $\exists k \in \mathbb{N} \quad n = 2k$
  alors $n^2 + 3n = (2k)^2 + 3(2k) = 4k^2 + 6k = 2(2k^2 + 3k)$ de la fome $2k'$ où $k' \in \mathbb{N}$

— ou bien n est impair donc $\exists k \in \mathbb{N} \quad n = 2k + 1$
  alors $n^2 + 3n = (2k+1)^2 + 3(2k+1) = 4k^2 + 4k + 1 + 6k + 3 = 2(2k^2 + 5k + 2)$ de la fome $2k'$ où $k' \in \mathbb{N}$

2.3 Exercice

> Soient a et b des réels.
>
> 1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x - 1}$
> 2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x - 1}$

2.3.1 Corrigé

1. — ou $a \neq 0$
   - — ou $a > 0$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^3}{x} = \lim_{x\to+\infty} ax^2 = +\infty$
   - — ou $a < 0$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^3}{x} = \lim_{x\to+\infty} ax^2 = -\infty$

   — ou $a = 0$
   - — ou bien $b \neq 0$
     - — ou $b > 0$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{bx^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} bx = +\infty$
     - — ou $b < 0$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{bx^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} bx = -\infty$
   - — ou bien $b = 0$
     $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$
2. Déterminons $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x - 1}$
   (a) Posons $N(x) = ax^3 + bx^2 + x - 1$ et $D(x) = x - 1$. Alors $\displaystyle\lim_{x\to1} N(x) = a + b$ et $\displaystyle\lim_{x\to1} D(x) = 0$
   (b) ou bien $a + b = 0$
   - — Par la méthode directe on aboutit à une indétermination du type $\dfrac{0}{0}$ car $\displaystyle\lim_{x\to1} N(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to1} D(x) = 0$

— Nous pouvons lever cette indétermination en remarquant que $a = -b$ d'où
$f(x) = \dfrac{ax^3 - ax^2 + x - 1}{x-1} = \dfrac{ax^2(x-1) + x - 1}{x-1} = \dfrac{(x-1)(ax^2+1)}{x-1} = ax^2 + 1$
donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = a + 1$

(c) ou bien $a + b \neq 0$

i. ou bien $a + b > 0$
— $\lim\limits_{x \to 1^+} N(x) = a + b$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} D(x) = 0^+$
donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$
— $\lim\limits_{x \to 1^-} N(x) = a + b$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} D(x) = 0^-$
donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

ii. ou bien $a + b < 0$
— $\lim\limits_{x \to 1^+} N(x) = a + b$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} D(x) = 0^+$
donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$
— $\lim\limits_{x \to 1^-} N(x) = a + b$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} D(x) = 0^-$
donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

2.4 Exercice

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $[0;1]$ et vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} f(0) = f(1) \\ \forall x_1 \in [0;1] \quad \forall x_2 \in [0;1] \quad x_1 \neq x_2 \quad \mid f(x_1) - f(x_2 \mid < \mid x_1 - x_2 \mid \end{cases}$$

Démontrer que $\forall x_1 \in [0;1] \quad \forall x_2 \in [0;1] \quad \mid f(x_1) - f(x_2 \mid < \dfrac{1}{2}$

2.4.1 Démonstration

Soient $x_1 \in [0;1]$ et $x_2 \in [0;1]$ avec $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$. De deux choses l'une :

- ou bien $\mid x_2 - x_1 \mid < \dfrac{1}{2}$. Or $\mid f(x_1) - f(x_2 \mid < \mid x_1 - x_2 \mid$ donc $\mid f(x_1) - f(x_2 \mid < \dfrac{1}{2}$. CQFD.
- ou bien $\mid x_2 - x_1 \mid \geq \dfrac{1}{2}$
  Alors $x_1 - x_2 \leq -\dfrac{1}{2}$ d'où $1 + x_1 - x_2 \leq 1 - \dfrac{1}{2}$ donc $x_1 + (1 - x_2) \leq \dfrac{1}{2}$.
  D'après l'inégalité triangulaire, on obtient :
  $\mid f(x_1) - f(x_2 \mid \leq \mid f(x_1) - f(0) \mid + \mid f(0) - f(1) \mid + \mid f(1) - f(x_2) \mid$
  d'où $\mid f(x_1) - f(x_2 \mid \leq \mid x_1 - 0 \mid + \mid 0 \mid + \mid 1 - x_2 \mid$
  Par conséquent, $\mid f(x_1) - f(x_2 \mid < x_1 + (1 - x_2) \leq \dfrac{1}{2}$. CQFD.

2.5 Olympiades Moscou 1968

Soit $x \in \mathbb{N}$. Soit $p(x)$ le produit de ses chiffres en numération décimale.
Résoudre l'équation suivante, d'inconnue x :

$$x^2 - 10x - 22 = p(x)$$

1. Déterminons les solutions à un chiffre.
   Dans ce cas $p(x) = x$
   (a) Méthode 1 :
   - $x = 0$ n'est pas solution car $0^2 - 10(0) - 22 = -22 \neq 0 = p(x)$
   - $x = 1$ n'est pas solution car $1^2 - 10(1) - 22 = -31 \neq 1 = p(x)$
   - $x = 2$ n'est pas solution car $2^2 - 10(2) - 22 = -38 \neq 2 = p(x)$
   - $x = 3$ n'est pas solution car $3^2 - 10(3) - 22 = -43 \neq 3 = p(x)$
   - $x = 4$ n'est pas solution car $4^2 - 10(4) - 22 = -46 \neq 4 = p(x)$
   - $x = 5$ n'est pas solution car $5^2 - 10(5) - 22 = -47 \neq 5 = p(x)$
   - $x = 6$ n'est pas solution car $6^2 - 10(6) - 22 = -46 \neq 6 = p(x)$
   - $x = 7$ n'est pas solution car $7^2 - 10(7) - 22 = -43 \neq 7 = p(x)$
   - $x = 8$ n'est pas solution car $8^2 - 10(8) - 22 = -38 \neq 6 = p(x)$
   - $x = 9$ n'est pas solution car $9^2 - 10(9) - 22 = -21 \neq 9 = p(x)$

   (b) Méthode 2 :
   $x^2 - 10x - 22 = p(x) \iff x^2 - 10x - 22 = x \iff x^2 - 11x - 22 = 0$
   $\iff x = \dfrac{11 - \sqrt{209}}{2} \notin \mathbb{Z}$ ou $x = \dfrac{11 + \sqrt{209}}{2} \notin \mathbb{Z}$

   Il n'y a donc pas de solution x à un chiffre.
2. Déterminons les solutions à deux chiffres.
   Dans ce cas notons $x = \overline{yz} = 10y + z$ où $y \in [|1; 9|]$ et $z \in [|0; 9|]$. Alors $p(x) = yz$.
   $x^2 - 10x - 22 = p(x) \iff (10y + z)^2 - 10(10y + z) - 22 = yz$
   $\iff 100y^2 + 20yz + z^2 - 100y - 10z - yz = 22$
   $\iff 100y^2 + 19yz + z^2 - 100y - 10z = 22$
   $\iff 100y(y - 1) + z(z - 10 + 19y) = 22$
   (a) ou bien $y = 1$ alors :
   $x^2 - 10x - 22 = p(x) \iff z(z - 10 + 19) = 22$
   $\iff z^2 + 9z - 22 = 0 \iff z = 2$ ou $z = -11$.
   On rejette $z = -11$ car on cherche $z \in [|0; 9|]$. On accepte par contre $z = 2$
   (b) ou bien $y > 1$.
   Alors $100y(y - 1) > 100$.
   De même $19y > 19$ donc $z - 10 + 19y > z + 9$ d'où $z(z - 10 + 19y) \geq 0$.
   Par conséquent, le nombre $A = 100y(y - 1) + z(z - 10 + 19y) > 100$ donc $A = 22$ est impossible à résoudre.
   (c) La seule solution à deux chiffres est $x = \overline{12}$
3. Déterminons les solutions x à plus de deux chiffres.
   On est sûr que $x \geq 100$ donc $\exists n \geq 2 \quad 10^n \leq x < 10^{n+1}$.
   Par conséquent,
   $p(x) \leq \underbrace{9999\cdots 99}_{(n+1)fois}$ donc $x^2 - 10x - 22 - p(x) \geq x^2 - 10x - 22 - B$ où $B = \underbrace{9999\cdots 99}_{(n+1)fois}$.
   Posons $g(x) = x^2 - 10x - 22 - B$.
   g est dérivable sur $[0; +\infty[$ avec $g(x) = 2x - 10 = 2(x - 5)$
   $g(100) = 100^2 - 10(100) - 22 - 999 = 7979$

x	0		5		100		$+\infty$
$g'(x) = 2x - 10$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	7979	$\nearrow$	

   On peut en conclure que dès que $x \geq 100$ alors $x^2 - 10x - 22 - p(x)$ ne s'annulera jamais.
4. En conclusion, la seule solution de cette équation est $\boxed{x = 12}$

3 Le raisonnement par l'absurde

Pour démontrer que $p \Rightarrow q$ est vraie et comme l'on sait que $p \Rightarrow q$ équivaut à *non*(p) *ou* q on va supposer que p *et non*(q) est vrai .On aboutit à une contradiction donc p *et non*(q) est faux donc sa négation *non*(p) *ou* q est vraie donc $p \Rightarrow q$ est vraie.

3.1 Exercice

Si (D) et (D') sont des droites parallèles et si $(D")$ coupe (D) alors $(D")$ coupe (D')

3.1.1 Corrigé

Supposons que $(D")$ ne coupe pas (D') alors $(D")$ est parallèle à (D'). Or (D') est parallèle à (D).
Par transitivité du parallèlisme on a (D) et $(D")$ parallèles. On aboutit à une contradiction car $(D")$ coupe (D)
.
Donc la supposition $(D")$ ne coupe pas (D') est fausse d'où $(D")$ coupe (D'). CQFD.

3.2 $\sqrt{2}$ est irrationnel

1. Démontrer que si un entier n est pair alors son carré n^2 est pair
2. Démontrer que si un entier n est impair alors son carré n^2 est impair
3. En déduire du 1°) que si n^2 est impair alors n est impair
4. En déduire du 2°) que si n^2 est pair alors n est pair
5. Compléter n *pair* $\Longleftrightarrow \cdots$
6. Compléter n *impair* $\Longleftrightarrow \cdots$
7. Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel (c'est-à- dire ne peut se mettre sous la forme $\frac{p}{q}$ où p est un entier relatif et q un entier relatif non nul).

3.2.1 Corrigé

1. soit un entier n pair alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ donc son carré $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k'$ où $k' = 2k^2$ est un entier naturel donc n^2 est pair
2. soit un entier n impair alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ donc son carré $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1 = 2k'+1$ où $k' = 2k^2+2k)$ est un entier naturel donc n^2 est impair
3. Supposons que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ irréductible avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ donc $2 = \frac{p^2}{q^2}$.
   Par conséquent $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair donc p est pair d'où $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$.
   Comme $p^2 = 2q^2$ alors $(2k)^2 = 2q^2$. On en déduit que $q^2 = 2k^2$ donc q^2 est pair d'où $\exists k' \in \mathbb{N}$ tel que $q = 2k'$
   Mais alors la fraction $\frac{p}{q} = \frac{2k}{2k'} = \frac{k}{k'}$ est réductible. Contradiction. Donc l'hypothèse $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est fausse.

3.3 Exercice

On veut résoudre le problème suivant :

$$\exists n \geq 3\ \exists (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3\ x^2+y^2+z^2 \equiv -1 \pmod{2^n}$$

.

1. Montrer qu'il n'y a pas de solution pour $n = 3$
2. On considère le cas $n > 3$
   (a) Montrer d'abord que si (x,y,z) était solution de ce problème alors ou bien x, y et z seraient tous trois impairs ou bien deux d'entre eux seraient pairs et le troisième impair.
   (b) Montrer que si deux d'entre eux seraient pairs et le troisième impair alors on aboutit aussi à une contradiction.
   (c) Montrer que si x, y et z seraient tous trois impairs alors on aboutit à une contradiction.
3. Conclure qu'il n'y a pas de solution au problème posé.

3.3.1 Démonstration

1. Soit $n = 3$
   - ou bien x, y et z sont impairs :
     alors $x^2 + y^2 + z^2 = (2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2 = 4(a^2 + a + b^2 + b + c^2 + c) + 3 = 4(a(a+1) + b(b+1) + c(c+1)) + 3$
     Or le produit de 2 entiers consécutifs est pair ce qui est le cas de $a(a+1)$; $b(b+1)$; $c(c+1)$.
     Donc $x^2+y^2+z^2 = 8k+3$ donc $x^2+y^2+z^2 \equiv 3 \pmod{2^3}$. Or $3 \equiv -5 \pmod{2^3}$ donc pas de solution au problème posé pour $n = 3$
   - ou bien deux d'entre eux x, y sont impairs et z pair :
     alors $x^2+y^2+z^2 = (2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c)^2 = 4(a^2+a+b^2+b+c^2)+3 = 4(a(a+1)+b(b+1)+c^2)+2$
     ...
   - ou bien un seul est impair x et les deux autres y, z sont impairs :
     alors $x^2 + y^2 + z^2 = (2a+1)^2 + (2b)^2 + (2c)^2 = 4(a^2 + a + b^2 + c^2) + 1 = 4(a(a+1) + b^2 + c^2) + 1$
     ...
   - ou bien les trois sont pairs :
     alors $x^2 + y^2 + z^2 = (2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$
     ...
2.
3. Supposons qu'il existe $n > 3$ pour lequel $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1 \pmod{2^n}$ aurait une solution alors on aurait $x^2+y^2+z^2 = k2^n - 1$ donc $x^2+y^2+z^2+1 = k2^n$. Or $x^2+y^2+z^2 \equiv 3 \pmod 8$ donc $x^2+y^2+z^2 = 8q+3$ donc $k2^n = 8q + 3$ impossible car $k2^n$ est pair et $8q + 3$ est impair.

3.4 Un mix d'absurde et de disjonction de cas

> Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal.

Raisonnons par l'absurde. supposons que $\sqrt{2}$ est un décimal donc il a un développement décimal fini. Soit x le dernier chiffre de ce développement décimal. On sait que $\sqrt{2}^2 = 2$ donc

— ou $x = 1$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 1 donc il est impossible d'obtenir 2
— ou $x = 2$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 4 donc il est impossible d'obtenir 2
— ou $x = 3$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 9 donc il est impossible d'obtenir 2
— ou $x = 4$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 5 donc il est impossible d'obtenir 2
— ou $x = 6$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 6 donc il est impossible d'obtenir 2
— ou $x = 7$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 9 donc il est impossible d'obtenir 2
— ou $x = 8$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 4 donc il est impossible d'obtenir 2
— ou $x = 9$ donc le développement décimal de x^2 se termine par 1 donc il est impossible d'obtenir 2

Par conséquent, on aboutit à une contradiction donc $\sqrt{2}$ ne peut être un nombre décimal.

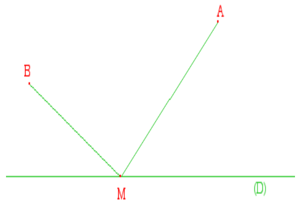
3.5 Exercice

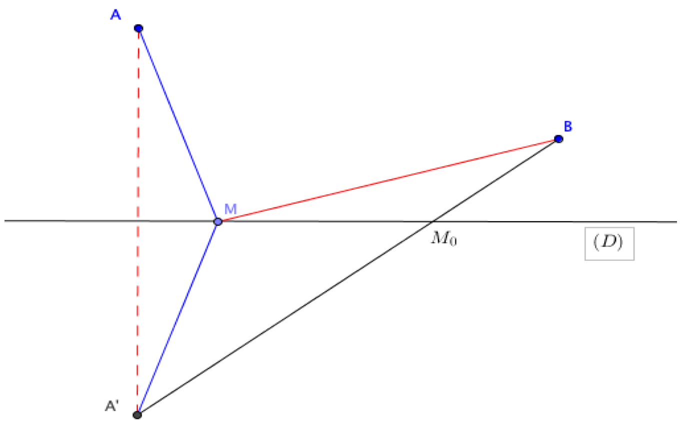
Soit la suite u_n définie par : $u_0 = 1$; $u_1 = \cos(3)$ et pour tout entier $n \geq 2$ par $u_n = 2u_1u_{n-1} - u_{n-2}$.
Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ l'on a $u_n = \cos(3n)$

4 Le raisonnement par équivalence logique

4.1 Billard à 1 côté

Une droite (D) partage le plan en deux demi-plans. Soient des points A et B situés dans le même demi-plan.
On crée un chemin AMB reliant A à B et passant par un point M situé sur la droite (D).
Où placer M sur la droite (D) pour que ce chemin AMB soit le plus court possible ?





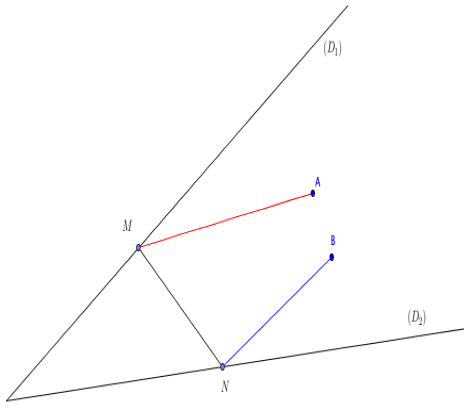
Soit A' le symétrique de A par rapport à la droite (D).
Comme une symétrie est une isométrie alors elle conserve les distances donc $AM = A'M$.
Par conséquent,

$$\text{résoudre } AM + MB \text{ minimum } \iff \text{ résoudre } A'M + MB \text{ minimum } \iff A', M \text{ et } B \text{ alignés}$$

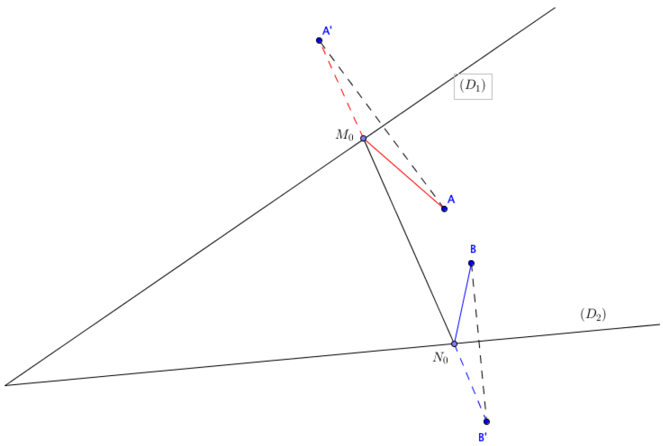
.
La position cherchée du point M est M_0.

On obtient le même résultat en prenant aussi B' le symétrique de B par rapport à la droite (D).

4.2 Billard à 2 côtés



Deux demi-droites (D_1) et (D_2) sont concourantes. Soient A et B deux points situés dans la région du plan délimitée par ces deux demi-droites plan. On crée un chemin $AMNB$ reliant A à B et passant par un point M situé sur la demi-droite (D_1) et un point N situé sur la demi-droite (D_2).
Où placer M sur la demi-droite (D_1) et N sur la demi-droite (D_2) pour que ce chemin $AMNB$ soit le plus court possible ?



Soient A' le symétrique de A par rapport à la demi-droite (D_1) et B' le symétrique de B par rapport à la demi-droite (D_2).
Comme une symétrie est une isométrie alors elle conserve les distances donc $AM = A'M$ et $BN = B'N$.
Par conséquent,

$$\text{résoudre } AM+MN+NB \text{ minimum} \iff \text{résoudre } A'M+MN+NB' \text{ minimum} \iff A', M, N \text{ et } B' \text{ alignés}$$

.
La position cherchée du point M est M_0 et celle du point N est N_0.

4.3 Equivalence logique

Lorsque l'implication $p \Rightarrow q$ et son implication réciproque $q \Rightarrow p$ sont vraies on dira que les propositions p et q sont équivalentes ou encore que p est une CNS(Condition nécessaire et suffisante) de q ce qui s'écrit $p \Leftrightarrow q$.

Il y a des équivalences logiques célèbres :

- Le triangle ABC est rectangle en $A \Leftrightarrow \quad BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Egalité de Pythagore)
- I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
- Un produit de réels est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul $ab = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$
- Deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ sont égaux pour tout réel x si et seulement si les coefficients des monômes respectifs sont égaux.

Attention aussi dans les résolutions de systèmes par addition :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{array} \right. \Rightarrow 2x = 8$$

On perd ici l'équivalence logique. Donc on aura au bout de ce raisonnement $\mathcal{S} \subset \{(4,2)\}$. Il faudra absolument écrire la vérification : le couple $(4,2)$ est solution du système car $x + y = 4 + 2 = 6$ et $x - y = 4 - 2 = 2$.
On aura alors $\{(4,2)\} \subset \mathcal{S}$.
On pourra alors conclure : Comme $\mathcal{S} \subset \{(4,2)\}$ et $\{(4,2)\} \subset \mathcal{S}$ alors $\mathcal{S} = \{(4,2)\}$.
Pour garder l'équivalence logique tout au long du raisonnement et avoir directement
$\mathcal{S} = \{(4,2)\}$, il faut utiliser une méthode hybride en conservant une des deux équations initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 6 \\ 2x = 8 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 6 \\ x = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 2 \\ x = 4 \end{array} \right.$$

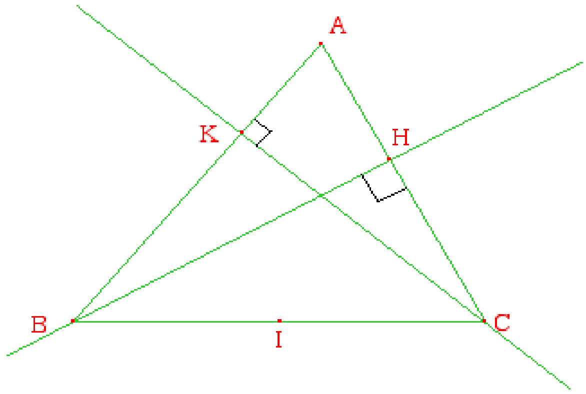
On en déduit que $\mathcal{S} = \{(4,2)\}$

5 Le raisonnement par analogie

Le raisonnement par analogie consiste à raisonner de telle sorte que l'on trouve un lien, une correspondance, un rapport de sens entre 2 ou plusieurs objets (mots, figures,nombres,signes,...)

5.1 Exercice

Soit un triangle ABC . Soit I le milieu du segment $[BC]$. Soit H le pied de la hauteur issue de B et soit K le pied de la hauteur issue de C.
Démontrer que le triangle IKH est isocèle.



1. Considérons le triangle BHC rectangle en H. alors la médiane HI est telle que $HI = \dfrac{BC}{2}$
2. Par analogie en considérant le triangle BKC en remplaçant B par B, C par C et H par K alors $KI = \dfrac{BC}{2}$
3. Comme $IH = IK$ alors le triangle IHK est isocèle en I

6 Le raisonnement par analyse-synthèse

"L'analyse et la synthèse consistent à démonter et à remonter une machine pour en connaître tous les rouages"
Condillac

C'est un type de raisonnement permettant de déterminer l'existence et l'unicité d'un objet mathématique vérifiant des propriétés données

6.1

Démontrer que toute fonction numérique définie sur R est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

6.1.1 Corrigé

— **Analyse :**
Supposons que $f = p + i$ où p est paire et i est impaire. Alors
— $\forall x \in \mathbb{R}$ l'on a $f(x) = p(x) + i(x)$
— Or f est paire et i est impaire alors $f(-x) = p(-x) + i(-x)$ donc $f(-x) = p(x) - i(x)$
Par conséquent,

$$\begin{cases} f(x) = p(x) + i(x) \\ f(-x) = p(x) - i(x) \end{cases}$$

donc $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

— **Synthèse :**
Soit f définie sur $\mathbb{R}$.
— soit p et i définies aussi sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$
— p est paire
— i est impaire
— $f = p + i$

6.2

Démontrer que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \ln(x) = +\infty$

6.2.1 Corrigé

— analyse : soit $A > 0$. Supposons $\exists B > 0$ tel que d'une part $B \geq 2^n$ et d'autre part $\forall x > B\ ln(x) > A$
Comme $x > B$ alors $x > 2^n$. Or ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc $ln(x) > ln(2^n)$ donc $ln(x) > n\ ln(2)$.
Si l'on veut donc que $ln(x) > A$ il suffit de prendre n tel que $n\ ln(2) > A$ c'est-à-dire tel que $n > \dfrac{A}{ln(2)}$

— synthèse : soit $A > 0$. Soit $B = 2^n$ où n est la partie entière de $\dfrac{A}{ln(2)} + 1$. Alors $\forall x > B$ on a $ln(x) > A$
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$

7 Le raisonnement par récurrence

7.1 Axiome d'induction compléte

Soit E une partie de $\mathbb{N}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

1. $0 \in E$
2. si $n \in E$ alors $n + 1 \in E$

alors $E = \mathbb{N}$.

7.2 Théorème de récurrence faible

Soit Pr une propriété que peut vérifier un entier naturel k (ce que l'on notera $Pr(k)$) Soit n_0 un entier naturel.

1. Si $Pr(n_0)$ est vraie (c'est-à-dire que la propriété Pr est vraie en n_0)
2. Si pour tout k entier $\geq n_0$, l'implication $Pr(k) \Rightarrow Pr(k+1)$ est vraie (c'est-à-dire que la propriété est héréditaire)

Alors pour tout $n \geq n_0$, $Pr(n)$ est vraie .

7.2.1 Démonstration

. On fait cette démonstration dans le cas où $n_0 = 0$.
Soit $E = \{n \in \mathbb{N} \ / \ Pr(n) \text{ est vraie } \}$.

1. $0 \in E$ car $Pr(0)$ est vraie.
2. si $n \in E$ alors $n + 1 \in E$ puisque $Pr(n) \Rightarrow Pr(n + 1)$

donc d'après l'axiome d'induction complète, on a : $E = \mathbb{N}$.

7.3 Attention !

Il y a deux étapes dans ce type de démonstration.
- Dans l'étape 1, il faut vérifier que la propriété est vraie uniquement en n_0
- Dans l'étape 2 , en considérant la table de vérité de l'implication logique

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Comme il faut démontrer que l'implication est vraie, on procédera ainsi :
On supposera que $pr(k)$ est vraie (c'est ce que l'on appelle l'hypothèse de récurrence) et on raisonnera jusqu'à prouver que $pr(k+1)$ est vraie.
On aura ainsi démontré que l'implication $(Pr(k) \Rightarrow Pr(k+1))$ est vraie

7.4 Théorème de récurrence double

Soit Pr une propriété que peut vérifier un entier naturel k (ce que l'on notera $Pr(k)$). Soit n_0 un entier naturel.

1. Si $Pr(n_0)$ et $Pr(n_0+1)$ sont vraies
2. Si pour tout k entier $\geq n_0$, l'implication $Pr(k) et\ Pr(k+1)) \Rightarrow Pr(k+2)$
   est vraie (c'est-à-dire que la propriété est doublement héréditaire)

Alors pour tout $n \geq n_0$, $Pr(n)$ est vraie .

7.5 Théorème de récurrence forte

Soit Pr une propriété que peut vérifier un entier naturel k (ce que l'on notera $Pr(k)$). Soit n_0 un entier naturel.

1. Si $Pr(n_0)$
2. Si pour tout k entier $\geq n_0$, l'implication $Pr(n_0)$ et $Pr(n_0+1)$ et $\cdots$ et $Pr(k) \Rightarrow Pr(k+1)$
   est vraie (c'est-à-dire que la propriété est doublement héréditaire)

Alors pour tout $n \geq n_0$, $Pr(n)$ est vraie .

7.6 Cardinal de $P(E)$

1. Déterminer l'ensemble des parties de E noté $\mathcal{P}(E)$ dans les cas suivants $E_1 = \{a\}$; $E_2 = \{a;b\}$; $E_3 = \{a;b;c\}$
2. Démontrer par récurrence que si E est un ensemble fini ayant n éléments alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de ses parties a 2^n éléments
3. En déduire $\mathcal{P}(\emptyset)$; $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$; $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$; $Card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))))$

7.6.1 corrigé

1. Pour créer l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E,
   — on place d'abord la seule partie à 0 éléments qui est l'ensemble vide $\emptyset$
   — puis les parties à 1 élément qu'on appelle les singletons,
   — les parties à 2 éléments qu'on appelle les paires,
   — celles à 3 éléments ,
   — ...
   — celles à $n-1$ éléments
   — et enfin la seule partie à n éléments, la partie pleine c'est-à-dire l'ensemble E lui-même.

   Par conséquent,
   — si $E_1 = \{a\}$ alors $\mathcal{P}(E_1) = \{\emptyset; \{a\}\}$
   — si $E_2 = \{a; b\}$ alors $E_2 = E_1 \cup \{b\}$ et $\mathcal{P}(E_2) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\}$
   — si $E_3 = \{a; b; c\}$ alors $E_3 = E_2 \cup \{c\}$ et $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; \{a; b; c\}\}$

   On peut donc remarquer que lorsque l'on ajoute un élément rouge à un ensemble E_i , alors l'ensemble des parties du nouvel ensemble $E_i \cup \{x\}$ est formé de toutes les anciennes parties de E_i auxquelles on ajoute de nouvelles parties qui sont en fait formées des anciennes parties auxquelles on ajoute le nouveau élément rouge $\{x\}$.
   Donc il y a autant de nouvelles parties ayant ce nouvel élément rouge x que d'anciennes parties n'ayant pas x.
2. On pose $pr(n)$:" le nombre de parties d'un ensemble ayant n éléments est 2^n"
   (a) Etape 1 : initialisation
   A-t-on $pr(0)$?
   c'est-à-dire a-t-on le nombre de parties d'un ensemble ayant 0 éléments est 2^0 ?
   Oui car si $Card(E) = 0$ c'est que $E = \emptyset$ donc $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. $\mathcal{P}(E)$ n'a donc qu'un seul élément.
   Par conséquent $pr(0)$ est vraie.
   (b) Etape 2 : hérédité
   Soit un certain entier $k \geq 0$. A-t-on $pr(k) \Longrightarrow pr(k+1)$?
   c'est-à-dire a-t-on le nombre de parties d'un ensemble ayant k éléments est $2^k \Longrightarrow$ que le nombre de parties d'un ensemble ayant $k+1$ éléments est 2^{k+1}
   Supposons que l'hypothèse de récurrence suivante " le nombre de parties d'un ensemble ayant k éléments est 2^k " soit vraie.
   Soit un ensemble F ayant $k+1$ éléments. Isolons un élément x de F . Par conséquent $F = E \cup \{x\}$ où E a k éléments.
   Alors l'ensemble des parties du nouvel ensemble $F = E \cup \{x\}$ est formé de toutes les anciennes parties de E auxquelles on ajoute de nouvelles parties qui sont en fait formées des anciennes parties auxquelles on ajoute le nouveau élément rouge $\{x\}$.
   Or d'après l'hypothèse de récurrence, $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^k$ et de plus il y a autant de nouvelles parties ayant ce nouvel élément rouge que d'anciennes parties n'ayant pas $\{x\}$
   donc $Card(\mathcal{P}(F)) = 2^k + 2^k = 2(2^k) = 2^{1+k}$ CQFD.

(c) Conclusion pr est initialisé en 0 et pr est héréditaire
donc pour tout entier naturel n, si $Card(E) = n$ alors $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$"

3. — $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
   — $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset; \{\emptyset\}\}$
   — $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \mathcal{P}(\{\emptyset; \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset; \{\emptyset\}; \{\{\emptyset\}\}; \{\emptyset; \{\emptyset\}\}\}$
   — Comme $card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = 4$ alors $Card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))) = 2^4 = 16$

7.7 Inégalité de Bernoulli

♡ ♡ ♡
Soit a un réel > 0.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, l'on a :

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

2. Redémontrer cette inégalité en utilisant la formule du binôme de Newton ci-dessous :
Si a et b sont des réels alors pour tout entier naturel n

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

7.7.1 corrigé

1. On pose $pr(n)$: "$(1+a)^n \geq 1+na$"
   (a) Etape 1 : initialisation
   A-t-on $pr(0)$? c'est-à-dire a-t-on $(1+a)^0 \geq 1+0a$? c'est-à-dire a-t-on $1 \geq 1$? Oui.
   Par conséquent $pr(0)$ est vraie.
   (b) Etape 2 : hérédité
   Soit un certain entier $k \geq 0$. A-t-on $pr(k) \Longrightarrow pr(k+1)$?
   c'est-à-dire a-t-on $(1+a)^k \geq 1+ka \Longrightarrow (1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$
   Supposons donc que $(1+a)^k \geq 1+ka$. Or $(1+a)^{k+1} = (1+a)^k(1+a)$.
   Comme $(1+a)^k \geq (1+ka)$ comme $(1+a) > 0$ car $a > 0$ donc $(1+a)^k(1+a) \geq (1+ka)(1+a)$
   d'où $(1+a)^{k+1} \geq 1+ka+a+ka^2$ Mais $ka^2 \geq 0$ puisque $k \geq 0$ et $a > 0$
   donc $1+ka+a+ka^2 \geq 1+a+ka$.
   d'où $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$
   (c) Conclusion pr est initialisé en 0 et pr est héréditaire donc pr est vraie pour tout entier naturel n
2. D'après la formule du binôme de Newton,
   $(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} a^k = \binom{n}{0} 1^n a^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} a^1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} a^k = 1+na+\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} a^k$
   car $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$.
   Or $(1+a)^n = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} a^k = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^k \geq 0$ donc $\boxed{(1+a)^n \geq 1+na}$

7.8 Quelques sommes remarquables

Démontrer par récurrence que :

1. $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = S_1^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
4. $\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$
5. $\sum_{k=1}^{n} k(k!) = 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$
6. Soit une suite $(u_n)_{n\in N^*}$ telle que :
   $\forall n \geq 1 \quad u_n > 0$ et $\sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$
   Démontrer avec une récurrence forte que $\forall n \geq 1 \quad u_n = n$

7.8.1 corrigé

1. Notons $pr(n)$: "$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$"
   (a) **Etape 1 : Initialisation**
   A-t-on $pr(1)$?
   c'est-à-dire a-t-on $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$? Oui car $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$
   (b) **Etape 2 : Hérédité**
   Supposons que pour un certain entier $n \geq 1$ l'on ait $pr(n)$ c'est-à-dire que $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
   Alors $1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)) + (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \dfrac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$
   $= \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ donc $pr(n+1)$ est vraie.
   (c) **Conclusion :**
   $\left\{\begin{array}{l} pr \text{ est initialisée en } 1 \\ pr \text{ est héréditaire} \end{array}\right.$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad pr(n)$ est vraie.
   Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2. Notons $pr(n)$: "$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$"

   (a) **Etape 1 : Initialisation**

   A-t-on $pr(1)$? c'est-à-dire a-t-on $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}$?

   Oui car $\dfrac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1$

   (b) **Etape 2 : Hérédité**

   Supposons que pour un certain entier $n \geq 1$ l'on ait $pr(n)$ c'est-à-dire que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   Alors $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right) + (n+1)^2$

   $= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

   $= \dfrac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \dfrac{(n+1)\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right)}{6} = \dfrac{(n+1)\left(2n^2 + 7n + 6\right)}{6} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n -}{6}$

   donc $pr(n+1)$ est vraie.

   (c) **Conclusion :**

   $\left\{\begin{array}{l} pr \text{ est initialisée en } 1 \\ pr \text{ est héréditaire} \end{array}\right.$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad pr(n)$ est vraie.

   Par conséquent, $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. Notons $pr(n)$: "$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$"

   (a) **Etape 1 : Initialisation**

   A-t-on $pr(1)$? c'est-à-dire a-t-on $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$? Oui car $\dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$

   (b) **Etape 2 : Hérédité**

   Supposons que pour un certain entier $n \geq 1$ l'on ait $pr(n)$ c'est-à-dire que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   Alors $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3\right) + (n+1)^3$

   $= \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \dfrac{(n+1)^2\left(n^2 + 4n + 1\right)}{4} = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ donc $pr(n+1)$ est vraie.

   (c) **Conclusion :**

   $\left\{\begin{array}{l} pr \text{ est initialisée en } 1 \\ pr \text{ est héréditaire} \end{array}\right.$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad pr(n)$ est vraie.

   Par conséquent, $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = S_1^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1^2$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k!) = 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$

6. Soit la propriété $pr(n)$: "$u_n = n$"

   (a) Etape 1 Initialisation : Démontrons que $pr(1)$ est vraie c'est-à-dire que $u_1 = 1$.

   Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2$ donc $u_1^3 = u_1^2$ donc $u_1^3 - u_1^2 = 0$ d'où $u_1^2(u_1 - 1) = 0$. or $u_1^2 > 0$ car $u_1 > 0$ puisque $\forall n \geq 1 \quad u_n > 0$.

   Par conséquent $u_1 - 1 = 0$ donc $u_1 = 1$. CQFD.

   (b) Soit un certain $n \geq 1$. Supposons que pour tout entier naturel $k \leq n$, l'implication $pr(k)$ est vraie. Démontrons qu'alors $pr(k+1)$ est vraie.

On sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$
donc $u_1^3 + u_2^3 + \cdots + u_n^3 + u_{n+1}^3 = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1})^2$
d'où $(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)^2 + u_{n+1}^3 = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)^2 + 2(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)(u_{n+1}) + u_{n+1}^2$
Alors $u_{n+1}^3 = 2(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)(u_{n+1}) + u_{n+1}^2$
Par conséquent, $u_{n+1}^3 - u_{n+1}^2 - 2(1+2+\cdots+n)(u_{n+1}) = 0$ d'où $u_{n+1}\left(u_{n+1}^2 - u_{n+1} - n(n+1)\right) = 0$
Posons $X = u_{n+1}$.
Nous devons donc résoudre l'équation $X^2 - X - n(n+1) = 0$
$\delta = (-1)^2 - 4(-n(n+1)) = 1 + 4n(n+1) = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$
L'équation du second degré admet donc 2 solutions :
$X' = \dfrac{1-(2n+1)}{2} = -\dfrac{2n}{2} = -n$
$X" = \dfrac{1+(2n+1)}{2} = \dfrac{2n+2}{2} = n+1$
Comme $u_{n+1} > 0$ alors on rejette X' donc $u_{n+1} = X" = n+1$ CQFD.

(c) *pr* est initialisée en 1 et *pr* est bien héréditaire donc *pr* est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$

7.9 Fausse récurrence

Soit la propriété $pr(n)$: « $5^n + 1$ est un multiple non nul de 4 »

1. Cette propriété est-elle vraie pour $n = 0$?
2. Démontrer que pour tout entier naturel k, l'implication $pr(k) \Rightarrow pr(k+1)$ est vraie.
3. Conclusion ?

7.9.1 corrigé

Soit la propriété $pr(n)$: « $5^n + 1$ est un multiple non nul de 4 »

1. $pr(0)$ est fausse car $5^0 + 1 = 2$ n'est pas un multiple non nul de 4
2. Et pourtant, pour tout entier naturel k, l'implication $pr(k) \Rightarrow pr(k+1)$ est vraie.
   en effet, supposons que pour un certain entier $k \geq 0$ l'on ait $pr(k)$ c'est-à-dire que $5^k + 1$ est un multiple non nul de 4 donc $\exists q \in \mathbb{Z}^*$ tel que $5^k + 1 = 4q$ d'où $5^k = 4q - 1$
   Alors $5^{k+1} + 1 = 5(5^k) + 1 = 5(4q - 1) + 1 = 20q - 5 + 1 = 20q - 4 = 4(5q - 1) = 5q'$ où $q' = 5q - 1 \in \mathbb{Z}^*$.
   Donc $pr(k+1)$ est vraie CQFD.
3. On est en présence d'une fausse récurrence car pr est bien héréditaire mais n'est pas initialisée en 0

7.10 Encore une fausse récurrence

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n la propriété suivante :"$10^n - 1$ est un multiple de 9" est vraie.
2. On s'intéresse maintenant à une autre propriété :"$10^n + 1$ est divisible par 9"
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n,
   l'implication suivante : " $10^n + 1$ est divisible par 9 $\Rightarrow$ $10^{n+1} + 1$ est divisible par 9 " est vraie.
   (b) Déduire du 1°) que, pour tout entier naturel n la propriété "$10^n + 1$ est divisible par 9" n'est jamais vraie.
   (c) Conclusion ?

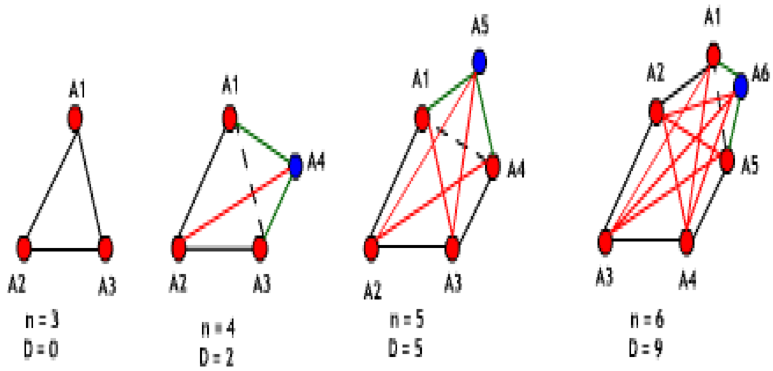
7.10.1 Corrigé

1. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n la propriété suivante :"$10^n - 1$ est un multiple de 9" est vraie. Notons $pr(n)$: "$10^n - 1$ est un multiple de 9.
   (a) Initialisation :
   $10^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 9 \times 0$ donc la propriété pr est initialisée en $n = 0$
   (b) Hérédité :
   Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ l'on ait $pr(n)$ alors $\exists k \in \mathbb{N} \quad 10^n - 1 = 9k$
   Par conséquent, $10^{n+1} - 1 = 10(10^n) - 1 = 10(9k + 1) - 1 = 90k + 10 - 9 = 90k + 9 = 9(10k + 1) = 9k'$ où $k' \in \mathbb{N}$ donc $pr(n + 1)$ est vraie.
   (c) Conclusion :
   pr est initialisée en 0 et pr est héréditaire donc pr est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$
   (d) On s'intéresse maintenant à une autre propriété :"$10^n + 1$ est divisible par 9"
      i. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ l'on ait $\exists k \in \mathbb{N} \quad 10^n - 1 = 9k$
      Par conséquent, $10^{n+1} - 1 = 10(10^n) - 1 = 10(9k+1) - 1 = 90k+10-1 = 90k+9 = 9(10k+1) = 9k'$ où $k' \in \mathbb{N}$ l'implication suivante : " $10^n + 1$ est divisible par 9 $\Rightarrow$ $10^{n+1} + 1$ est divisible par 9 " est vraie.
      ii. Pour tout entier naturel n la propriété "$10^n + 1$ est divisible par 9" n'est jamais vraie car
      $10^n + 1 = 10^n - 1 + 2 = 9k + 2$
      iii. En conclusion, pour la propriété "$10^n + 1$ est divisible par 9"on a une fausse récurrence.

7.11 Le nombre de diagonales d'un polygône convexe

Soit un polygône convexe de n côtés. Démontrer par récurrence que si n est un entier supérieur ou égal à 3 alors le nombre de diagonales est $\dfrac{n(n-3)}{2}$
NB – Un polygone est convexe lorsque quelques soient les points M et N situés dans l'intérieur de ce polygône, le segment $[MN]$ est inclus dans cet intérieur.

7.11.1 corrigé



Notons D_n le nombre de diagonales. Soit la propriété $pr(n)$: " $D_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$ "

1. $pr(3)$ est vraie car $D_3 = 0 = \dfrac{3(3-3)}{2}$. Dans un triangle, il n'y a aucune diagonale.
2. Supposons que pour un certain entier $k \geq 3$ l'on ait $D_k = \dfrac{k(k-3)}{2}$. Considérons alors un polygône R convexe de $k+1$ côtés. Donc ce polygône R a $k+1$ sommets. Notons ces sommets $A_1, A_2, \cdots, A_k, A_{k+1}$. Soit Q le polygône $A_1, A_2, \cdots, A_k$. Ce polygône Q a donc D_k diagonales. On construit R à partir de Q en ajoutant le sommet A_{k+1}. On trace les segments $[A_1A_{k+1}]$ et $[A_kA_{k+1}]$. Mais alors l'ancien côté $[A_1A_k]$ de Q devient alors une diagonale de R. Le nombre D_{k+1} de R est $D_k + k - 2 + 1$ où
   (a) D_k est le nombre de diagonales de Q
   (b) k : le nombre de segments partant de A_{k+1} vers les k autres sommets $A_1, A_2, \cdots, A_k$.
   (c) il faut enlever -2 correspondants aux deux nouveau côtés $[A_1A_{k+1}]$ et $[A_kA_{k+1}]$
   (d) il faut rajouter $+1$ correspondant à la nouvelle diagonale $[A_1A_k]$

   Or $D_k + k - 2 + 1 = \dfrac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \dfrac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} = \dfrac{k^2 - k + 2k - 2}{2} = \dfrac{(k+1)(k-2)}{2}$. Par conséquent, $D_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k+1-3)}{2}$. CQFD.
3. La propriété est initialisée en 3 et héréditaire donc elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 3$

7.12 Multiples de 11

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11

7.13 Corrigé

On pose $pr(n)$: "$10^n - (-1)^n = 11q$" où $q \in \mathbb{Z}$

1. Etape 1 : initialisation
   A-t-on $pr(0)$? c'est-à-dire a-t-on $10^0 - (-1)^0 = 11q$? c'est-à-dire a-t-on $1 - 1 = 11q$? c'est-à-dire a-t-on $0 = 11q$? Oui car $0 = 11 \times 0$
   Par conséquent $pr(0)$ est vraie.
2. Etape 2 : hérédité
   Soit un certain entier $k \geq 0$. A-t-on $pr(k) \Longrightarrow pr(k+1)$?
   c'est-à-dire a-t-on $\exists q \in \mathbb{Z}\ 10^k - (-1)^k = 11q \Longrightarrow \exists q' \in \mathbb{Z}\ 10^{k+1} - (-1)^{k+1} = 11q'$
   Supposons donc que $10^k - (-1)^k = 11q$.
   Alors $10^{k+1} - (-1)^{k+1} = 10(10^k) - (-1)^k(-1) = 10[11q + (-1)^k] + (-1)^k = 10 \times 11q + 11(-1)^k = 11[10q + (-1)^k] = 11q'$ où $q' = 10q + (-1)^k$ est un entier car $(-1)^k$ est un entier qui vaut soit 1 soit -1 et $10q$ est un entier relatif car q est un entier relatif.
3. Conclusion pr est initialisé en 0 et pr est héréditaire donc pr est vraie pour tout entier naturel n

7.14 Inégalité

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 3$ que $n^2 > 2n + 1$

7.14.1 Corrigé

1. Etape 1 : initialisation
   A-t-on $pr(3)$? c'est-à-dire a-t-on $3^2 > 2(3) + 1$? c'est-à-dire a-t-on $9 > 7$? Oui, par conséquent $pr(3)$ est vraie.
2. Etape 2 : hérédité
   Soit un certain entier $k \geq 3$. A-t-on $pr(k) \Longrightarrow pr(k+1)$?
   c'est-à-dire a-t-on $n^2 > 2n + 1 \Longrightarrow (n+1)^2 > 2(n+1) + 1$
   Supposons donc que $n^2 > 2n + 1$.
   Alors $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.
   Comme $n^2 > 2n + 1$ alors $(n+1)^2 > 2n + 1 + 2n + 1$.
   Or $n \geq 3$ donc $2n \geq 6$ donc $2n > 1$ donc $1 + 2n + 1 > 1 + 1 + 1$.
   Par conséquent $2n + 1 + 2n + 1 > 2n + 3$ donc $(n+1)^2 > 2n + 3$ CQFD.
3. Conclusion pr est initialisé en 3 et pr est héréditaire donc pr est vraie pour tout entier naturel $n \geq 3$

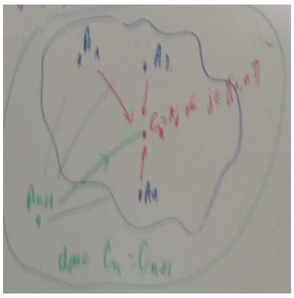
7.15 Graphe orienté

> Son considère n villes $A-1, A_2, \cdots, A_n$ où $n \geq 2$. On suppose qu'entre deux villes quelconques, il y a toujours une route à sens unique. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$ il existe toujours au moins une ville notée C_n parmi ces n villes à laquelle on peut aller en partant de toutes les autres villes , soit à l'aide d'un chemin direct, soit en visitant une seule ville intermédiaire.

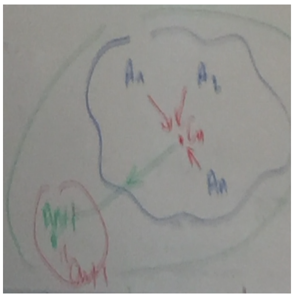
7.15.1 corrigé

Soit pr la propriété recherchée.

1. Etape 1 : initialisation
   A-t-on $pr(2)$? oui car entre 2 villes A_1 et A_2 il y a deux cas possibles :
   — ou bien le chemin va de A_1 vers A_2 donc $C_2 = A_2$
   — ou bien le chemin va de A_2 vers A_1 donc $C_2 = A_1$
2. Etape 2 : hérédité
   Soit un certain entier $n \geq 2$. Supposons donc qu'il existe toujours au moins une ville notée C_n parmi n villes à laquelle on peut aller en partant de toutes les autres villes , soit à l'aide d'un chemin direct, soit en visitant une seule ville intermédiaire.
   Considérons une ville supplémentaire A_{n+1} Il y a un chemin de A_{n+1} vers C_n
   — ou bien le chemin va de A_{n+1} vers C_n donc $C_{n+1} = C_n$

   — ou bien le chemin va de C_n vers A_{n+1} donc $C_{n+1} = A_{n+1}$

   CQFD.
3. Conclusion pr est initialisé en 2 et pr est héréditaire donc pr est vraie pour tout entier naturel $n \geq 2$

7.16 Suite de Fibonacci alias Léonard de Pise

Soit une suite (u_n) définie par :
- $u_1 = 1$
- $u_2 = 1$
- $\forall n$ entier ≥ 3 $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

1. Résoudre l'équation d'inconnue x réelle : $x^2 = x + 1$.
   On note Φ la solution positive et Ψ l'autre solution.
2. Démontrer par une récurrence double que pour tout entier naturel n :
   $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \Psi^n)$

Corrigé :

1. Soit l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$ d'inconnue réelle x.
   (a) Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5$.
   Comme $\Delta > 0$ alors cette équation a deux solutions réelles :
   $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\Psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
   (b) $\Phi + \Psi = -\dfrac{b}{a} = 1$, $\Phi\Psi = \dfrac{c}{a} = -1$, $\Phi - \Psi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$
   (c) Comme Φ est solution de $x^2 - x - 1 = 0$ alors $\Phi^2 = \Phi + 1$.

   (d) Comme Ψ est solution de $x^2 - x - 1 = 0$ alors $\Psi^2 = \Psi + 1$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
   $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \Psi^n)$
   (a) Initialisation double : La propriété recherchée est vraie pour les deux premières valeurs :
   $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^1 - \Psi^1) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi - \Psi) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5} = 1 = u_1$
   $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^2 - \Psi^2) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}((\Phi + 1) - (\Psi + 1)) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi - \Psi) = 1 = u_2$
   (b) Hérédité : supposons que pour un certain entier $k \geq 1$ l'on a :
   $u_k = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^k - \Psi^k)$ et $u_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{k+1} - \Psi^{k+1})$
   alors $u_{k+2} = u_k + u_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^k - \Psi^k) + \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{k+1} - \Psi^{k+1})$
   donc $u_{k+2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}((\Phi^k + \Phi^{k+1}) - (\Psi^k + \Psi^{k+1}))$
   $= \dfrac{1}{\sqrt{5}}((\Phi^k(1 + \Phi) - \Psi^k(1 + \Psi))$
   Or $1 + \Phi = \Phi^2$ et $1 + \Psi = \Psi^2$ donc $u_{k+2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{k+2} - \Psi^{k+2})$
   (c) On a démontré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$ l'on a : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \Psi^n)$

7.17 Puissance d'une matrice

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \neq 0$ l'on a :
$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7.17.1 corrigé

Notons $pr(n)$: " $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Initialisation :
   $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc la propriété pr est initialisée en $n = 1$
2. Hérédité :
   Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ l'on ait $pr(n)$ alors $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   Par conséquent, $A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $pr(n+1)$ est vraie.
3. Conclusion :
   pr est initialisé en 1 et pr est héréditaire donc pr est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$

7.18 Formule du binôme de Newton(1642-1727)

Soient a et b des nombres réels donc $ab = ba$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \ b^{n-i}$$

Or $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} \ b^j$$

en effectuant le changement d'indice $j = n - i$

7.18.1 Corrigé

Notons $pr(n)$: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \ b^{n-i}$.

1. Initialisation : elle est vraie en $n = 0$ car :
$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 \ b^{0-0}$
2. Hérédité : Supposons que la propriété est vraie pour un entier fixé $k \geq 0$ c'est-à-dire que :
$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^k \ b^{n-k}$
Alors $(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = (a+b)[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^k \ b^{n-k}]$
$= (a+b)(\binom{k}{0} a^0 b^k + \binom{k}{1} a^1 \ b^{k-1} + \cdots + \binom{k}{i} a^i \ b^{k-i} + \cdots + \binom{k}{k-1} a^{k-1} \ b^1 + \binom{k}{k} a^k b^0)$
$= (a+b)(b^k + \binom{k}{1} a^1 \ b^{k-1} + \cdots + \binom{k}{i} a^i \ b^{k-i} + \cdots + \binom{k}{k-1} a^{k-1} \ b^1 + a^k)$
$= (ab^k + \binom{k}{1} a^2 \ b^{k-1} + \cdots + \binom{k}{i} a^{i+1} \ b^{k-i} + \cdots + \binom{k}{k-1} a^k \ b^1 + a^{k+1}$
$+ b^{k+1} + \binom{k}{1} a^1 \ b^k + \cdots + \binom{k}{i} a^i \ b^{k-i+1} + \cdots + \binom{k}{k-1} a^{k-1} \ b^2 + a^k b)$
$= b^{k+1} + ab^k[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}] + a^2 \ b^{k-1}[\binom{k}{2} + \binom{k}{1}] + \cdots + a^i \ b^{k-i+1}[\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}] + a^{i+1} \ b^{k-i}[\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1}] + \cdots + a^k \ b^1[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}] + a^{k+1}$
$= b^{k+1} + ab^k \binom{k+1}{1} + a^2 \ b^{k-1} \binom{k+1}{2} + \cdots + a^i \ b^{k-i+1} \binom{k+1}{i} + a^{i+1} \ b^{k-i} \binom{k+1}{i+1} + \cdots + a^k \ b^1 \binom{k+1}{k} + a^{k+1}$
$= \binom{k+1}{0} a^0 b^{k+1} + ab^k \binom{k+1}{1} + a^2 \ b^{k-1} \binom{k+1}{2} + \cdots + a^i \ b^{k-i+1} \binom{k+1}{i} + a^{i+1} \ b^{k-i} \binom{k+1}{i+1} + \cdots + a^k \ b^1 \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} a^{k+1} b^0$
3. Conclusion : pr étant initialisée en 0 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$

Cette formule est valable pour tous éléments a et b d'un anneau à condition que ces éléments soient commutables c'est-à-dire que $ab = ba$.
C'est le cas pour des matrices carrées d'ordre n : A et B à condition d'avoir vérifié que $AB = BA$.

Souvent $A = I$ **la matrice de l'identité donc** $IB = B$ **et** $BI = B$ **donc** $IB = BI$ **donc**

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (I+B)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} I^{n-j}\ B^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} I\ B^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B^j$$

Si en plus, B est **nilpotente** par exemple, si $B^3 = O$
donc $\forall n \geq 3 \quad B^n = B^3 B^{n-3} = O$ d'où
$(I+B)^n = \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \binom{n}{2} B^2 = I + nB + \dfrac{n(n-1)}{2} B^2$

7.19 Formule de Leibniz

Soient des fonctions f et g dérivables indéfiniment sur $\mathbb{R}$. Alors leur produit fg est aussi indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ (fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} \ g^{(n-i)}$$

7.19.1 Corrigé

Notons $pr(n) : (fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} \ g^{(n-i)}$.

1. Initialisation : elle est vraie en $n = 1$ car :
   $(fg)' = fg' + f'g = \binom{1}{0} f^{(0)} \ g^{(1-0)} + \binom{1}{1} f^{(1)} \ g^{(1-1)} = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} f^{(i)} \ g^{(1-i)}$
2. Hérédité : Supposons que la propriété est vraie pour un entier fixé $k \geq 1$ c'est-à-dire que : $(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} \ g^{(k-i)}$.
   Alors $(fg)^{(k+1)} = [(fg)^{(k)}]' = [\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} \ g^{(k-i)}]' = \sum_{i=0}^{k} [\binom{k}{i} f^{(i)} \ g^{(k-i)}]'$.
   $= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} [f^{(i)} \ g^{(k-i)}]' = \sum_{i=0}^{k} [\binom{k}{i} [f^{(i+1)} \ g^{(k-i)} + f^{(i)} \ g^{(k-i+1)}]$
   $= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i+1)} \ g^{(k-i)} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} \ g^{(k-i+1)}$
   $= \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} f^{(j)} \ g^{(k-j+1)} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} \ g^{(k+1-j)}$ en effectuant le changement d'indice $j = i + 1$ dans la première somme et $j = i$ dans la deuxième somme.
   Donc $(fg)^{(k+1)} = \binom{k}{0} f^{(0)} \ g^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{k} [\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j}] f^{(j)} \ g^{(k+1-j)} + \binom{k}{k} f^{(k+1)} \ g^{(0)}$
   $(fg)^{(k+1)} = \binom{k+1}{0} f^{(0)} \ g^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k+1}{j} f^{(j)} \ g^{(k+1-j)} + \binom{k+1}{k+1} f^{(k+1)} \ g^{(0)}$
   $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} f^{(i)} \ g^{(n+1-i)}$ donc $pr(n + 1)$ est vraie.
3. Conclusion : pr étant initialisée en 1 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$

Applications : On vérifie aisément cette formule sur quelques cas particuliers :

1. $(fg)' = f'g + fg'$
2. $(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg''$
3. $(fg)^{(3)} = ((fg)'')' = f'''g + f''g' + 2f''g' + 2f'g'' + f'g'' + fg''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$

7.20 Factorisation de $a^n - b^n$

1. Soient a et b des réels.
   Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$ l'on a :
   $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$
   Indication : pour l'hérédité, on pourra utiliser l'astuce suivante :
   $a^{k+1} - b^{k+1} = aa^k - ab^k + ab^k - bb^k$
2. En déduire une factorisation de $1 - x^n$ pour tout entier $n \geq 2$
3. Soit un entier $n \geq 2$, soient la fonction numérique f d'une variable réelle définie par
   $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$
   et la fonction numérique g définie par
   $g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$
   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ? Quel est l'ensemble de définition de g ?
   (b) Si l'on suppose que $x = 1$, que vaut $f(x)$ et que vaut $g(x)$?
   (c) Si l'on suppose que $x \neq 1$:
   — Déterminer une expression simplifiée de $f(x)$ sous forme d'un quotient.
   — Déterminer une expression simplifiée de $g(x)$ sous forme d'un quotient.
   — En utilisant le produit $xf(x)$ retrouver l'expression simplifiée de $f(x)$

7.20.1 Corrigé

1. Soient a et b des réels.
   Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$ l'on a :
   $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$

   — Etape 1 : pour n = 2, comme $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ alors la propriété est vraie au rang $n = 2$
   — Etape 2 : soit un entier $n \geq 2$ tel que l'on a :
   $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$
   Alors $a^{n+1} - b^{n+1} = aa^n - ab^n + ab^n - bb^n = a(a^n - b^n) + (a-b)b^n$
   $= a(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) + (a-b)b^n$
   $= (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + a^3b^{n-3} + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}) + (a-b)b^n$
   $= (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + a^3b^{n-3} + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n)$
   donc la propriété est vraie au rang $n+1$
   — La propriété étant initialisée en 2 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier $n \geq 2$
2. En déduire une factorisation de $1 - x^n$ pour tout entier $n \geq 2$
   On en déduit en posant $a = 1$ et $b = x$ et étant tenant compte du fait que $\forall k \ 1^k = 1$
   $1 - x^n = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-3} + x^{n-2} + x^{n-1})$
3. Soit un entier $n \geq 2$, soient la fonction numérique f d'une variable réelle définie par
   $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$
   et la fonction numérique g définie par
   $g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$
   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ? Quel est l'ensemble de définition de g ?
   f est une fonction polynôme de degré n donc est définie sur $\mathbb{R}$
   g est une fonction polynôme de degré $n-1$ donc est définie sur $\mathbb{R}$
   (b) Si l'on suppose que $x = 1$, que vaut $f(x)$ et que vaut $g(x)$?
   $f(1) = 1 + 1^1 + 1^2 + \cdots + 1^n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1$
   $g(1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

   (c) Si l'on suppose que $x \neq 1$:
   — Déterminer une expression simplifiée de $f(x)$ sous forme d'un quotient.
   Comme $1 - x^n = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-3} + x^{n-2} + x^{n-1})$ alors
   $1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-3} + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n)$
   $f(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x}$ car $x \neq 1$
   — Déterminer une expression simplifiée de $g(x)$ sous forme d'un quotient.
   Comme f est une fonction polynôme de degré n alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = g(x)$ donc

$g(x) = \dfrac{-(n+1)x^n(1-x) - (-1)(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$

En simplifiant $g(x) = \dfrac{x^n(-n-1+nx)+1}{(1-x)^2}$

— En utilisant le produit $xf(x)$ retrouver l'expression simplifiée de $f(x)$

$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

$xf(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1}$

donc $f(x) - xf(x) = 1 - x^{n+1}$ d'où $f(x)(1-x) = 1 - x^{n+1}$ donc $f(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ car $x \neq 1$

7.21 Exponentielle

Soit un réel $x \geq 0$.
Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x$$

7.21.1 Corrigé

Notons $pr(n)$: "$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x$"

1. Etape 1 : Initialisation en $n = 0$:
   A-t-on $pr(0)$? c'est-à-dire a-t-on $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!} \leq e^x$? c'est-à-dire a-t-on $\frac{x^0}{0!} \leq e^x$ c'est-à-dire a-t-on $1 \leq e^x$?
   oui car comme $x \geq 0$ alors exp étant une fonction croissante alors $exp(x) \geq exp(0)$ donc $e^x \geq 1$.
   La propriété est vraie au rang $n = 0$
2. Etape 2 : Hérédité :
   Soit un entier $n \geq 0$.
   Supposons que $pr(n)$ est vraie c'est-à-dire que $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x$.
   Démontrons que $pr(n+1)$ est vraie c'est-à-dire que $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} \leq e^x$.
   Notons $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ alors $P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$ $P'_{n+1}(x) = [\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}]' = \sum_{k=0}^{n+1} [\frac{x^k}{k!}]' = \sum_{k=0}^{n+1} k \frac{x^{k-1}}{k!}$
   $P'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} k \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$ en posant $j = k - 1$
   D'après l'hypothèse de récurrence : $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x$ donc $P'_{n+1}(x) \leq e^x$
   Posons $f(x) = P_{n+1}(x) - e^x$ alors $f'(x) = P'_{n+1} - e^x \leq 0$ d'où

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	

   car $f(0) = P_{n+1}(0) - e^0 = 1 - 1 = 0$.
   Par conséquent, $f(x) \leq 0$ donc $P_{n+1} \leq e^x$ donc $pr(n+1)$ est vraie.
3. Conclusion : pr étant initialisée en 0 et étant héréditaire est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$

7.22 Récurrence forte

Soit une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} 2^{n-i} u_i$

1. Déterminer les valeurs de u_1 ; u_2 et u_3
2. Démontrer par une récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 3^{n-1}$

7.22.1 Corrigé

1. $u_0 = 1; u_1 = u_{0+1} = \sum_{i=0}^{0} 2^{0-i} u_i = 2^{0-0} u_0 = 1 = 3^{1-1}$
2. $u_2 = u_{1+1} = \sum_{i=0}^{1} 2^{1-i} u_i = 2^{1-0} u_0 + 2^{1-1} u_1 = 2^1(1) + 2^0(1) = 3 = 3^{2-1}$
3. $u_3 = u_{2+1} = \sum_{i=0}^{2} 2^{2-i} u_i = 2^{2-0} u_0 + 2^{2-1} u_1 + 2^{2-2} u_2 = 2^2(1) + 2^1(1) + 2^0(3) = 4 + 2 + 3 = 9 = 3^{3-1}$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $pr(n)$: "$u_n = 3^{n-1}$"
   — Initialisation : Cette propriété est vraie au rang 1 car $u_1 = 1 = 3^{1-1}$
   — Hérédité Soit un certain entier $n \geq 1$ supposons que $pr(i)$ est vraie pour tout entier $1 \leq i \leq n$ c'est-à-dire que pour tout entier $1 \leq i \leq n$ l'on a : $u_i = 3^{i-1}$.
   Alors $u_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} 2^{n-i} u_i$
   $u_{n+1} = 2^{n-0} u_0 + 2^{n-1} u_1 + 2^{n-2} u_2 + \cdots + 2^{n-(n-1)} u_{n-1-1} + 2^{n-n} u_n$
   $u_{n+1} = 2^{n-0} + 2^{n-1} 3^{1-1} + 2^{n-2} 3^{2-1} + \cdots + 2^{n-(n-1)} 3^{n-1-1} + 2^{n-n} 3^{n-1}$
   Or $2^{n-1}3^0 + 2^{n-2}3^1 + \cdots + 2^1 3^{n-2} + 2^0 3^{n-1}$ est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 2^{n-1} et de raison $q = \frac{3}{2}$
   donc $u_{n+1} = 2^n + 2^{n-1} \dfrac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n}{1 - \frac{3}{2}}$
   Par conséquent, $u_{n+1} = 2^n + 2^{n-1} \dfrac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n}{-\frac{1}{2}}$
   $u_{n+1} = 2^n + 2^{n-1} \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2}}$
   $u_{n+1} = 2^n + 2^n \dfrac{3^n - 2^n}{2^n} = 2^n + 3^n - 2^n = 3^n$. CQFD

   — pr est initialisée en 1 et est héréditaire donc est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$