

Rallye Mathématiques 2006

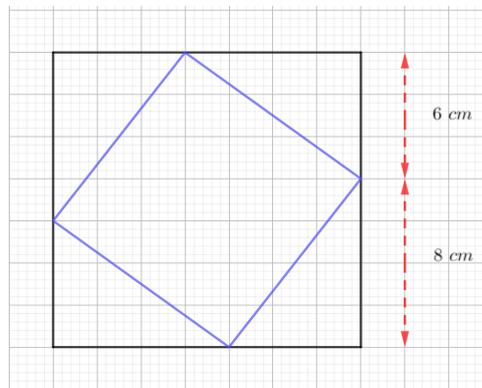
Irem Antilles-Guyane

22 janvier 2021

1 Finale Interacadémique Collèges - Énoncés et Corrigés

1.1 "C'est carré!" - 3 points

On dispose de deux carrés comme l'indique la figure ci-dessous .
Quelle est la longueur du côté du carré interne bleu ?



1.1.1 Corrigé

Tous les triangles rectangles sont semblables avec pour côtés de l'angle droit mesurant 6 cm et 8 cm.
Pour calculer leur hypoténuse de mesure c qui est en fait le côté du carré interne, nous pouvons utiliser le Théorème de Pythagore :

$$c^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \text{ donc } c = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

1.2 "Le téléphone sonne" - 4 points

Pendant le cours, la sonnerie de téléphone retentit pendant quelques secondes.

Le professeur en colère se dirige vers quatre garçons au fond de la classe ; il est sûr que le coupable se trouve parmi eux.

"Qui n'a pas éteint son portable ? " demande-t-il.

- "C'est Manuel" dit Johan.
- "C'est Vincent" répond Willem.
- "Ce n'est pas moi !" crie Vincent.
- "Ce n'est pas Vincent" confirme Manuel.

Un seul de ces garçons dit la vérité. Lequel ?

1.2.1 Corrigé

1. ou bien Johan dit vrai :
 - Manuel serait le coupable
 - Willem ment donc ce n'est pas Vincent le coupable.
 - Vincent ment donc c'est lui le coupable. On tombe donc sur une contradiction donc Johan ment.
2. ou bien Willem dit vrai :
 - Johan ment donc le coupable n'est pas Manuel.
 - D'après Wilhem qui ne ment pas , ce serait Vincent le coupable.
 - Vincent qui ment sachant qu'il est coupable affirme normalement "ce n'est pas moi"
 - Manuel qui ment ne peut dire que c'est Vincent le coupable.Wilhem dit donc vrai
3. ou bien Vincent dit vrai :l
 - Johan ment donc le coupable n'est pas Manuel.
 - Wilhem ment, donc Vincent n'est pas coupable.
 - Vincent dit vrai donc il affirme que ce n'est pas lui le coupable.
 - Manuel ment donc c'est Vincent le coupable.Il y a donc des contradictions donc Vincent ment.
4. ou bien Manuel dit vrai :
 - Johan ment donc le coupable n'est pas Manuel
 - Wilhem ment, donc Vincent n'est pas coupable
 - Vincent ment donc c'est lui le coupable
 - Mais Manuel qui dit vrai dit que ce n'est pas Vincent le coupable.Il ya donc contradiction donc Manuel ment.

Le garçon qui dot la vérité est Wilhem.

1.3 "Répartition" - 4 points

Je dispose de 60 bonbons que je veux répartir en plusieurs paquets contenant le même nombre de bonbons.
De combien de manières différentes puis-je répartir ces bonbons ?

1.3.1 Corrigé

1. $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ donc le nombre de diviseurs de 60 est $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12$
2. Les 12 diviseurs de 60 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60
3. Il y a 11 répartitions de 60 en des paquets de même quantité de bonbons sont :
 - 2 paquets de 30 de bonbons
 - 3 paquets de 20 de bonbons
 - 4paquets de 15 de bonbons
 - 5 paquets de 12 de bonbons
 - 6 paquets de 10 de bonbons
 - 10 paquets de 6 de bonbons
 - 12 paquets de 5 de bonbons
 - 15 paquets de 4 de bonbons
 - 20 paquets de 3 de bonbons
 - 30 paquets de 2 de bonbons
 - 60 paquets de 1 de bonbons

1.4 "Arrête ton char, Benur" - 5 points

Arthur et Benur comparent les compteurs kilométriques de leur voiture :

—

0	0	0	1	0
---	---	---	---	---

pour celle d'Arthur qui vient de s'offrir une nouvelle auto.

—

9	1	0	1	0
---	---	---	---	---

affichés au compteur de celle moins récente de Benur.

D'habitude, chaque jour, Arthur parcourt 5 fois plus de kilomètres que Benur, qui lui ne fait que 50 *km* au quotidien.

1. **Combien de jours après la date de la comparaison du kilométrage, les deux compteurs indiqueront le même chiffre ?**
2. **Quel est alors le kilométrage affiché par chaque voiture depuis ce jour ?**
(Quand le compteur dépasse 99999 il repasse à 00000)

1.4.1 Corrigé

Chaque jour, Arthur parcourt 5 *times* 50 = 250 *km* et Benur parcourt 50 *km*.

1. Soit n le nombre de jours. Après n jours :

— La voiture d'Arthur a parcouru $10 + 250 n$ kilomètres

— La voiture de Benur a parcouru $91010 + 50 n$ kilomètres

— L'écart au bout de n jours est $91010 + 50n - (10 + 250n) = 91000 - 200n$

Cet écart sera nul le jour n tel que $91000 - 200n = 0$ c'est-à-dire $n = \frac{91000}{200} = 455$

2. Le 455^e

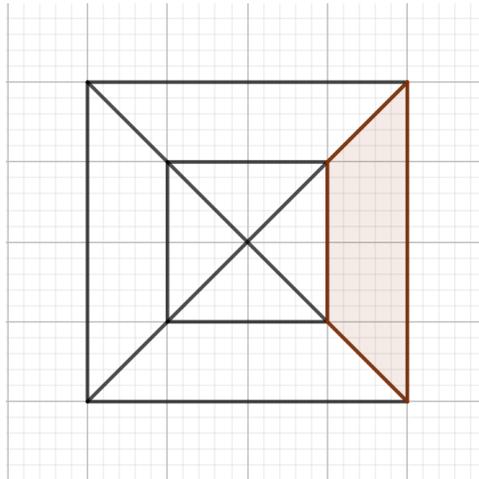
— Le compteur de la voiture d'Arthur va marquer : 13760 *km*

car $10 + 250 \times 455 = 113760$ et $113760 - 100000 = 13760$

— Le compteur de la voiture de Benur va marquer aussi : 13761 *km*

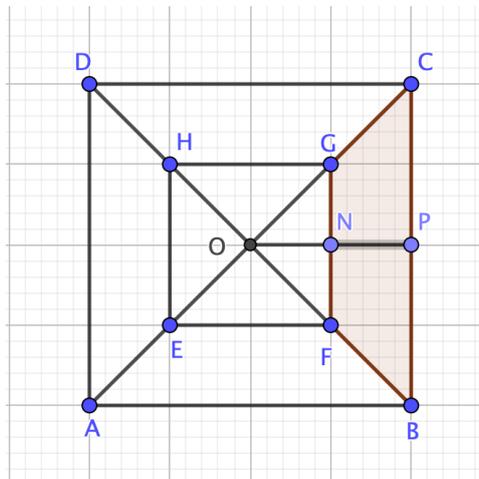
car $91010 + 50 \times 455 = 113760$ et $113760 - 100000 = 13760$

1.5 "L'aire du champ" - 6 points



Mon champ est la région grisée conformément à la figure ci-dessus.
 Le plus grand des 2 carrés est entouré par une clôture supportée par 104 piquets régulièrement espacés.
 Le second en nécessite 52 piquets, espacés de la même façon.
 Quelle fraction du grand carré, l'aire du champ représente-t-elle ?

1.5.1 Corrigé



- Notons c la mesure du côté du carré $ABCD$. L'aire du grand carré est donc $\mathcal{A}(ABCD) = c^2$
- Il y a 104 piquets sur le grand carré espacés régulièrement donc il y a sur chaque côté $\frac{104}{4} = 26$ espaces.
- Il y a 52 piquets sur le grand carré espacés régulièrement donc il y a sur chaque côté $\frac{52}{4} = 13$ espaces.
- Par conséquent, d'après le Théorème de Thalès, on a
 $FG = \frac{BC}{2} = \frac{c}{2}$; $OP = \frac{c}{2}$; $ON = \frac{OP}{2} = \frac{c}{4}$ donc $NP = \frac{c}{4}$
- Par conséquent, l'aire du trapèze $BFGC$ est donc $\frac{(BC + FG) \times NP}{2} = \frac{(c + \frac{c}{2}) \times \frac{c}{4}}{2} = \frac{3c^2}{16}$
- Le rapport entre l'aire du champ et l'aire du grand carré est donc :
 $\frac{\frac{3c^2}{16}}{c^2} = \frac{3}{16}$

1.6 "Le nombre mystérieux" - 6 points

Un nombre entier est écrit avec 5 chiffres.

On appelle voisin d'un chiffre un autre chiffre placé contre lui.

On connaît les informations suivantes sur ce nombre :

- Il possède le chiffre 3 qui se plaint d'être encadré par deux voisins inférieurs à lui.
- Il est divisible par 9 et par cinq autres nombres entiers seulement.
- Le chiffre 5 n'a qu'un voisin.
- Le chiffre 2 est la différence entre ses deux voisins.

Quel est ce nombre mystérieux ?

1.6.1 Corrigé

— Comme 5 n'a qu'un seul voisin on a donc deux possibilités pour le placer

5				
---	--	--	--	--

 et

				5
--	--	--	--	---

— Comme 3 n'a que deux voisins inférieurs à lui cela nous donne maintenant 8 cas :

—

5	1	3	2	
---	---	---	---	--

—

5	2	3	1	
---	---	---	---	--

—

5		1	3	2
---	--	---	---	---

 à rejeter car 2 a deux voisins

—

5		2	3	1
---	--	---	---	---

—

	1	3	2	5
--	---	---	---	---

—

	2	3	1	5
--	---	---	---	---

—

1	3	2		5
---	---	---	--	---

—

2	3	1		5
---	---	---	--	---

 à rejeter car 2 a deux voisins

— Or 2 est la différence entre ses voisins donc on a :

—

5	1	3	2	5
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

5	2	3	1	
---	---	---	---	--

—

5	5	2	3	1
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

	1	3	2	5
--	---	---	---	---

—

5	2	3	1	5
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

1	3	2	5	5
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

— donc il reste que deux possibilités :

5	2	3	1	
---	---	---	---	--

 et

	1	3	2	5
--	---	---	---	---

— ce qui fait qu'on doit examiner les cas suivants :

—

5	2	3	1	0
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

5	2	3	1	1
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

5	2	3	1	2
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

5	2	3	1	3
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

5	2	3	1	4
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

5	2	3	1	5
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

5	2	3	1	6
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

5	2	3	1	7
---	---	---	---	---

 divisible par 9

—

5	2	3	1	8
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

5	2	3	1	9
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

0	1	3	2	5
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

1	1	3	2	5
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

2	1	3	2	5
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

3	1	3	2	5
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

4	1	3	2	5
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

5	1	3	2	5
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

6	1	3	2	5
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

7	1	3	2	5
---	---	---	---	---

—

8	1	3	2	5
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

—

9	1	3	2	5
---	---	---	---	---

 à rejeter car non divisible par 9

— On peut retenir

5	2	3	1	7
---	---	---	---	---

 car à part 9 il a seulement cinq autres diviseurs .

L'ensemble de ses diviseurs est $\{1, 3, 9, 5813, 17439, 52317\}$

— Ce n'est pas le cas de

7	1	3	2	5
---	---	---	---	---

 car

l'ensemble de ses diviseurs est $\{1, 3, 5, 9, 15, 25, 45, 75, 225, 317, 951, 1585, 2853, 4755, 7925, 14265, 23775, 71325\}$